

Institute for Nuclear Research  
of the Russian Academy of Sciences

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт ядерных исследований  
Российской академии наук



А.С. Мальгин

**Выход космогенных нейтронов под землей:  
измерения и расчеты**

препринт  
preprint

ПРЕПРИНТ ИЯИ РАН  
1420/2016  
МАРТ 2016

МОСКВА 2016 MOSCOW

Institute for Nuclear Research  
of the Russian Academy of Sciences

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт ядерных исследований  
Российской академии наук



А.С. Мальгин

## Выход космогенных нейтронов под землей: измерения и расчеты

препринт  
preprint

ПРЕПРИНТ ИЯИ РАН  
1420/2016  
МАРТ 2016

МОСКВА 2016 MOSCOW

Institute for Nuclear Research  
of the Russian Academy of Sciences

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт ядерных исследований  
Российской академии наук



А.С. Мальгин

## Выход космогенных нейтронов под землей: измерения и расчеты

ПРЕПРИНТ ИЯИ РАН

1420/2016

МАРТ 2016

МОСКВА

2016

Institute for Nuclear Research  
of the Russian Academy of Sciences  
60-th October Anniversary prospect 7a,  
Moscow 117312, Russia

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт ядерных исследований Российской академии наук  
проспект 60-летия Октября, 7а  
Москва, 117312

А.С. Мальгин

Выход космогенных нейтронов под землей: измерения и расчеты

Оглавление

Введение .....	3
1. Характеристики космогенных нейтронов .....	5
1.1. Определения. Терминология .....	5
1.2. Выход космогенных нейтронов .....	6
1.3. Феноменология выхода нейтронов в адронных ливнях .....	11
1.3.1. Выход заряженных пионов в $h$ -ливнях .....	13
1.3.2. Выход нейтронов в $h$ -ливнях .....	17
1.4. Феноменология выхода нейтронов в электромагнитных ливнях .....	18
1.5. Зависимость выхода $Y_n$ от структуры ядра .....	23
1.6. Роль переходного эффекта при измерении выхода .....	24
1.6.1. Переходный эффект для нейтронов в $h$ -ливнях .....	27
1.6.2. Переходный эффект для нейтронов в $em$ -ливнях .....	28
2. Измерения выхода космогенных нейтронов .....	31
3. Расчеты величины выхода космогенных нейтронов в зависимости от $E_\mu$ и $A$ .....	36
3.1. Аналитические расчеты .....	36
3.2. Расчеты методом Монте-Карло .....	38
3.3. Расчеты выхода для $\alpha$ -частичных ядер .....	42
Заключение .....	47
Список литературы .....	50

А.С. Мальгин

Выход космогенных нейтронов под землей:  
измерения и расчеты

Препринт 1420/2016

Март 2016

Подписано в печать 22.03.2016

Ф-т 60x84/8. Уч.-изд.л. 2,5. Зак. 22382 Тираж 60 экз.  
Бесплатно

Печать цифровая

Издательский отдел

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт ядерных исследований Российской академии наук

117312, Москва, проспект 60-летия Октября, 7а

ISBN 978-5-94274-308-6

© Федеральное государственное  
бюджетное учреждение науки  
Институт ядерных исследований  
Российской академии наук, 2016  
Institute for Nuclear Research  
of the Russian Academy of Sciences, 2016

## Введение

Изучение образования нейтронов мюонами космических лучей (космогенных нейтронов) составляет особый раздел физики космических лучей. Ему сложно приписать какое-либо самостоятельное значение, поскольку основные процессы, приводящие к образованию нейтронов мюонами, достаточно известны. Трудности при определении характеристик космогенных нейтронов возникают из-за взаимосвязи процессов в области высоких энергий (генерация адронных и электромагнитных ливней потоком мюонов с некоторым спектром, множественные процессы) с ядерно-физическими явлениями в области низких энергий, сопровождающимися выходом нейтронов из ядер. В 50-ых годах прошлого столетия образование нейтронов мюонами исследовалось с целью установления характеристик фотоядерного взаимодействия мюонов. В середине 1960-х годов после появления работ [Зац65, Руа65] исследования генерации нейтронов мюонами под землей приобрели новое содержание — изучение источников фона в низкофонных подземных экспериментах. Сегодня с этими экспериментами связаны надежды обнаружить эффекты за рамками Стандартной модели такие как: взаимодействия частиц темной материи, безнейтринный двойной  $\beta$ -распад и другие редкие события.

До последнего времени набор данных, полученных за более чем 60 лет исследований космогенных нейтронов, трудно было назвать достаточным для установления зависимости их количественных характеристик от средней энергии потока мюонов  $\bar{E}_\mu$  и атомного вещества  $A$ . Этот факт и возросшие требования к точности определения фона в подземных экспериментах, а также нарастание вычислительных возможностей обусловили усиление интереса к моделированию процессов генерации нейтронов мюонами. Уже около 15 лет методом Монте-Карло с помощью

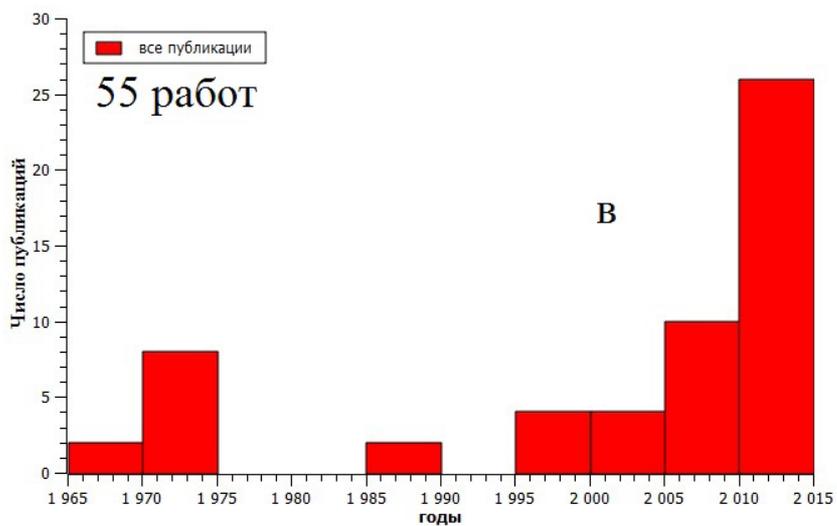
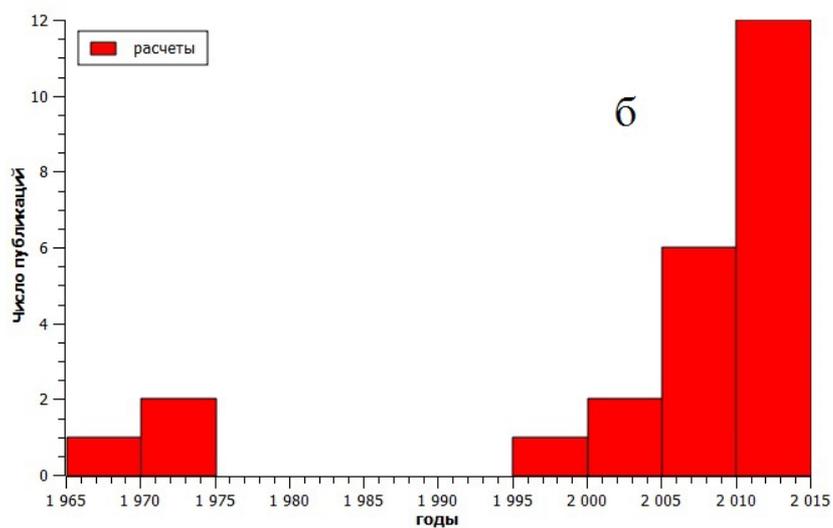
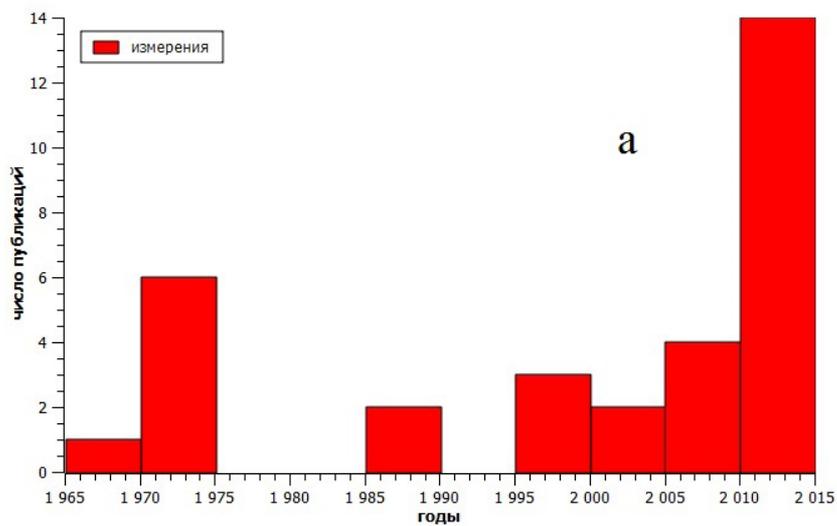


Рис. 1. Динамика публикаций по исследованию выхода космогенных нейтронов:  
 а — результаты измерений, б — результаты расчетов, в — все публикации

программных пакетов FLUKA, Geant4 и их версий исследуются закономерности образования космогенных нейтронов и связанных с ними космогенных радиоизотопов в зависимости от  $\bar{E}_\mu$  и  $A$ . Как будет показано ниже, результаты расчетов пока трудно назвать хорошо согласующимися между собой и с измерениями. Тем не менее, число имеющихся на сегодня экспериментальных и расчетных данных (рис.1) достигло объема, который дает возможность установить тенденции зависимости количественных характеристик потока космогенных нейтронов от  $\bar{E}_\mu$  и  $A$ .

## 1. Характеристики космогенных нейтронов

### 1.1. Определения. Терминология

Как было отмечено выше, космогенными считаются нейтроны, образуемые в веществе под землей мюонами космических лучей. Космогенными являются также нейтроны, генерируемые астрофизическими, атмосферными и солнечными нейтрино. Термин «космогенные» связывается только с нейтронами от мюонов в силу их доминирующей роли в потоке всех нейтронов, образуемых на глубинах вплоть до 10 км в.э. под землей частицами, приходящими из космоса.

Космогенные нейтроны характеризуются величинами: выходом  $Y_n$ , скоростью (темпом) образования  $R_n$ , потоком  $\Phi_n$ , энергетическим спектром  $F_n^s(T_n)$  ( $T_n$  — кинетическая энергия нейтрона). Скорость образования нейтронов в 1 г вещества зависит от глобальной интенсивности мюонов  $I_\mu(H)$  ( $\mu \cdot \text{см}^{-2} \text{с}^{-1}$ ) на глубине  $H$  и выхода  $Y(\bar{E}_\mu)$   $n/\mu/(\text{г} \cdot \text{см}^{-2})$ :

$$R_n(H) = I_\mu(H) Y(\bar{E}_\mu) (n \text{г}^{-1} \text{с}^{-1}), \quad (1)$$

где  $\bar{E}_\mu$  — средняя энергия потока мюонов, соответствующая глубине  $H$ .

Поток космогенных нейтронов дается выражением

$$\Phi_n(H) = R_n(H) l_n \rho = I_\mu(H) Y(\bar{E}_\mu) l_n \rho (n \cdot \text{см}^{-2} \text{с}^{-1}). \quad (2)$$

Произведение  $l_n \rho$  ( $\text{г} \cdot \text{см}^{-2}$ ) является длиной релаксации  $\lambda_n$ , характеризующей ослабление  $k$  изотропного потока нейтронов в веществе:

$k = \exp(-L/\lambda_n)$ ,  $L$  ( $\text{г} \cdot \text{см}^{-2}$ ) — толщина слоя вещества. Указанные характеристики космогенных нейтронов позволяют оценивать величину фоновых эффектов, вызываемых нейтронами образованными как в грунте, так и в материалах подземных установок.

## 1.2. Выход космогенных нейтронов

Как следует из формулы (2), среди характеристик космогенных нейтронов основную роль играет выход  $Y_n$ . Общепринятым определением выхода ядерной реакции является отношение числа образованных частиц  $n_b$  к числу частиц  $n_a$ , упавших на мишень [Яво79]:

$$y = n_b / n_a. \quad (3)$$

Величина выхода связана не только с природой и энергией падающих частиц, но и с толщиной мишени  $l$  (см). В общем виде число частиц  $n_b$  описывается выражением

$$n_b = n_a l c \sigma, \quad (4)$$

где  $c = \rho \mathcal{N}_A/A$  — концентрация ядер мишени с массовым числом  $A$ ,  $\rho$  — плотность,  $\mathcal{N}_A$  — число Авогадро,  $\sigma$  — сечение ядерной реакции.

Подставляя (4) в (3), получаем выражение для выхода реакции:

$$y = n_b / n_a = l \rho \sigma \mathcal{N}_A/A. \quad (5)$$

Это выражение справедливо для тонкой мишени, в которой падающие моноэнергетические частицы мало меняют свою энергию и сечение  $\sigma$  остается постоянным по всей толщине мишени. Для толстой мишени величина  $\sigma$  является усредненной (или эффективной) на диапазоне изменения энергии падающей частицы, теряющей ее в мишени за счет различных взаимодействий.

В силу большой проникающей способности мюонов (энергопотери в веществе около  $2 \text{ МэВ} \cdot \text{см}^2 \text{ г}^{-1}$ ) и высокой средней энергии  $\bar{E}_\mu$  более десятков ГэВ все подземные установки и конструкции можно считать «тонкими» мишенями, в которых энергопотери мюона  $\Delta E_\mu$  гораздо мень-

ше энергии  $\bar{E}_\mu$ . Необходимо отметить, что характер изменения энергии моноэнергетических мюонов при прохождении мишени отличается от изменения средней энергии потока мюонов космических лучей под землей: в первом случае средняя энергия выходящих из мишени мюонов  $\bar{E}_\mu^{fin}$  меньше энергии  $E_\mu^{in}$  падающих, во втором случае —  $\bar{E}_\mu^{fin} > \bar{E}_\mu^{in}$ .

В соответствии с (4) число нейтронов  $N_n$ , образованных моноэнергетическими мюонами  $N_\mu$  с энергией  $E_\mu$  в слое вещества  $l\rho$  ( $\text{г}\cdot\text{см}^{-2}$ ), записывается выражением

$$N_n(E_\mu, A) = N_\mu l\rho \frac{N_A}{A} \sigma_{\mu A} \nu_n. \quad (6)$$

Величина  $\sigma_{\mu A}$  представляет сумму сечений всех  $\mu A$ -взаимодействий, сопровождающихся образованием нейтронов мюоном фиксированной энергии  $E_\mu$ . Множественность  $\nu_n$  включает в себя все нейтроны без ограничений по энергии, в том числе и нейтроны размножения в  $nA$ -реакциях. Таким образом, произведение  $\sigma_{\mu A} \nu_n$  является функцией генерации нейтронов, включающей в себя все процессы с образованием нейтронов, инициированные мюонами.

Поскольку все мишени для мюонов под землей являются тонкими, при экспериментальном определении выхода результаты измерений в разных веществах унифицируются приведением к  $1 \text{ г}\cdot\text{см}^{-2}$ :

$$Y_n^{\text{изм}} = \frac{N_n}{N_\mu(l\rho)}. \quad (7)$$

Величина  $N_n$  в эксперименте определяется по количеству зарегистрированных нейтронов  $N_n^{\text{det}}$  с учетом эффективности их регистрации  $N_n = N_n^{\text{det}}/\eta_n$ . Подставляя в (7) величину  $N_n$  в виде (6), получаем выражение для выхода генерации космогенных нейтронов в веществе  $A$ :

$$Y_n(E_\mu, A) = \frac{N_A}{A} \langle \sigma_{\mu A} \nu_n \rangle, \quad (8)$$

которое в соответствии с выражениями (6) и (7) имеет размерность  $[n/\mu/(\text{г}\cdot\text{см}^{-2})]$ .

При средней энергии мюонов  $\bar{E}_\mu$  больше  $\sim 40$  ГэВ основная часть нейтронов образуется в адронных и электромагнитных ливнях, генерируемых мюонами. Ливень фиксированной энергии характеризуется своим продольным размером  $L_{sh}$ , который ограничивает минимальную толщину мишени, если она изолирована и не окружена большими массами вещества. В этом случае для корректного определения множественности  $\nu_n$  толщина мишени  $d_t$  должна быть достаточной для развития ливня, то есть не меньше  $\sim 10 t$ -единиц в случае электромагнитного ливня и не меньше  $\sim 4 \lambda_\pi$  — адронного ( $\lambda_\pi$  — длина свободного пробега пиона для неупругого  $\mu A$ -рассеяния). В подземных помещениях мишень всегда окружена веществом и при измерении выхода  $Y_n$  под землей это условие не является строгим. В тонкой мишени  $d_t < L_{sh}$  ливни, выходящие из окружающего вещества, генерируют нейтроны в слое  $d_t$  при разных значениях возраста  $s$ . Для усреднения генерации по длине ливня требуется достаточная статистика прохождений мюонов (и ливней) через мишень. В случае тонкой мишени существенным становится переходный эффект, изменяющий характеристики ливня на границе «мишень — окружающее вещество» и влияющий на величину измеряемого выхода нейтронов.

В виде (8) выход нейтронов был представлен в первых расчетах зависимости выхода от  $E_\mu$  [Зац65, Рау65]. Поскольку функция  $\langle \sigma_{\mu A} \nu_n \rangle$  включает в себя только процессы образования нейтронов без их транспорта в веществе, выход  $Y_n$  имеет смысл выхода генерации нейтронов. Его величина не зависит от условий измерений. Следовательно, выход  $Y_n$  наравне с другими физическими характеристиками является характеристикой вещества, определяющей его свойство (способность) производить нейтроны при облучении мюонами. Эта характеристика, представляемая выражением (8) и определяемая в измерениях по формуле (7), позволяет вычислять как скорость образования космогенных нейтронов  $R_n(\bar{E}_\mu, A)$ , так и соответствующий поток нейтронов  $\Phi_n(\bar{E}_\mu, A)$ .

В эксперименте часто необходимо знать число космогенных нейтронов, выходящих из мишени. Их удельное количество иногда тоже назы-

вают выходом [Man15, Ман15]. Эта величина зависит от функции генерации нейтронов, размеров мишени и способности поглощать нейтроны. Поэтому данная величина, также как скорость образования  $R_n$  и поток  $\Phi_n$ , является производной от выхода  $Y_n$ . По аналогии с техническим световыходом в сцинтилляционной технике ее можно назвать техническим выходом нейтронов  $Y_n^t$ . Выход  $Y_n^t$  связан с  $Y_n$  коэффициентом, задающим долю нейтронов, покидающих мишень:  $Y_n^t = k_n^t Y_n$ . Величина  $k_n^t$  зависит от длины релаксации нейтронов в веществе мишени  $\lambda_n$  и эффективного размера мишени данной геометрии  $L^{\text{эфф}}$ :  $k_n^t = \exp(-L^{\text{эфф}}/\lambda_n)$ ; для любой мишени  $Y_n > Y_n^t$ , так как  $k_n^t < 1$ . В эксперименте регистрируется только часть  $k_n^{\text{det}}$  нейтронов, выходящих из мишени. В таком случае  $Y_n^{\text{det}} = k_n^{\text{det}} Y_n^t = k_n^{\text{det}} k_n^t Y_n$ . Учитывая выражение для числа регистрируемых нейтронов  $N_n^{\text{det}} = \eta_n N_n$ , получаем связь между коэффициентами:  $\eta_n = k_n^{\text{det}} k_n^t$ .

При описании экспериментальных данных и представлении результатов расчета выхода  $Y_n$  используются зависимости

$$Y_n = c_A E_\mu^\alpha \text{ (при } A - \text{const)}, \quad (9)$$

$$Y_n = c_E A^\beta \text{ (при } E - \text{const)}. \quad (10)$$

Показатели  $\alpha$ ,  $\beta$  — постоянные, не зависящие от  $E_\mu$  и  $A$ . Их значения пока не установлены с достаточной точностью. В соответствии с экспериментальными данными и расчетами, величины  $\alpha$  и  $\beta$  заключены в интервалах:  $\alpha \sim 0.6-0.8$ ,  $\beta \sim 0.7-1.0$ . Это связано с небольшим числом измерений с одной стороны, и противоречивостью расчетов — с другой. Недостаточность экспериментального материала осложняется также необходимостью разделения данных по виду искомой зависимости (от  $E_\mu$  или  $A$ ) при установлении величины  $\alpha$  или  $\beta$ . Величины коэффициентов  $c_A$ ,  $c_E$  определяются методом поиска наилучшего согласия зависимостей (9, 10) с экспериментальными данными или результатами расчета. Коэффициенты  $c_A$  и  $c_E$  являются подгоночными параметрами, которые при представлении (9, 10) зависимостей выхода  $Y_n$  от  $E_\mu$  или  $A$  не имеют собственного физического содержания.

Объединяя выражения (9) и (10), получаем факторизацию выхода в виде [Бар72]:

$$Y_n = c E_\mu^\alpha A^\beta, \quad c — \text{const.} \quad (11)$$

В таком случае  $c_A = c A^\beta$ ,  $c_E = c E_\mu^\alpha$ . Представление выхода в виде степенных зависимостей (9) и (10) при постоянных  $\alpha$  и  $\beta$  вытекает из выражения для сечения  $\sigma_{\mu A}^h = \sigma_{\mu N} A^\alpha$  ( $\sigma_{\mu N}$  — сечение глубоко неупругого рассеяния мюона на нуклоне ядра  $A$ ) и зависимостей  $\nu_n \propto E^\alpha$ ,  $\nu_n \propto A^\beta$ . Такая форма зависимостей базируется на большом экспериментальном материале, полученном в ходе исследований множественных процессов в адрон-ядерных столкновениях [Меу63], [Бар72], [Ник80].

Недавно для  $Y_n$  была получена эмпирическая универсальная формула (UF), объединяющая зависимости выхода от  $\bar{E}_\mu$  и  $A$  в одном выражении [Ага 13, Ага13]:

$$Y(\bar{E}_\mu, A) = b_n^{\text{tot}} \bar{E}_\mu^\alpha A^\beta. \quad (12)$$

Значения констант  $b_n^{\text{tot}} = 4.4 \times 10^{-7} \text{ (г}^{-1}\text{см}^2\text{)}$ ,  $\alpha = 0.78$ ,  $\beta = 0.95$  были определены по данным измерений выхода для жидкого сцинтиллятора, Fe и Pb, полученным за шестьдесят лет исследования генерации нейтронов мюонами. Коэффициент  $b_n^{\text{tot}}$ , соответствующий коэффициенту  $c$  в (11), представляет удельные энергопотери мюона, от которых зависит количество образуемых нейтронов. В диапазоне возможных значений  $\bar{E}_\mu$  в современных подземных экспериментах 40–400 ГэВ величина  $b_n^{\text{tot}}$  практически не изменяется. Она также пренебрежимо слабо зависит от  $A$ . Таким образом, универсальная формула (12), объединяя зависимости выхода от  $\bar{E}_\mu$  и  $A$ , отражает естественную связь величины выхода  $Y_n$  с энергопотерями мюона.

Действительность UF подтверждается согласием расчета выхода по этой формуле для сцинтиллятора ( $Y_{\text{sc}} = (3.3 \pm 0.5) \times 10^{-4} \text{ н/}\mu\text{/}\text{(г/см}^2\text{)}$ ,  $\bar{E}_\mu = 280 \text{ ГэВ}$ ) и свинца ( $Y_{\text{Pb}} = (53 \pm 8) \times 10^{-4} \text{ н/}\mu\text{/}\text{(г/см}^2\text{)}$ ,  $\bar{E}_\mu = 260 \text{ ГэВ}$ ) с недавними измерениями в эксперименте BOREXINO  $Y_{\text{sc}} = (3.10 \pm 0.11) \times 10^{-4} \text{ н/}\mu\text{/}\text{(г/см}^2\text{)}$  [Bel13] и в эксперименте ZEPLIN-III  $Y_{\text{Pb}} = (58 \pm 2) \times 10^{-4} \text{ н/}\mu\text{/}\text{(г/см}^2\text{)}$  [Rei13].

### 1.3. Феноменология выхода нейтронов в адронных ливнях

В публикациях [Зац65, Руа65] на примере алюминия были впервые рассчитаны выходы всех каналов генерации нейтронов мюонами. В результате этих и последовавших затем расчетов [Гор73] стало понятно, что выход космогенных нейтронов  $Y_n$  на глубинах  $H > 100$  м в.э. представим суммой компонент  $Y_n^{ph}$  и  $Y_n^{em}$  :

$$Y_n = \frac{N_A}{A} (\langle \sigma^{ph} v_n^{ph} \rangle + \langle \sigma^{em} v_n^{em} \rangle) = Y_n^{ph} + Y_n^{em}, \quad (13)$$

а основным источником нейтронов являются ливни. На меньших глубинах становится заметным, а при  $H < 80$  м в.э. и доминирующим, выход нейтронов от  $\mu^-$ -захватов. Компоненты  $Y_n^{ph}$  и  $Y_n^{em}$  соответствуют образованию нейтронов в результате фотоядерных ( $ph$ ) и электромагнитных ( $em$ ) взаимодействий мюонов в веществе.

Компонента  $Y_n^{ph}$  включает в себя составляющие  $Y_n^v$  и  $Y_n^h$ . Составляющая  $Y_n^v$  обязана ядерному фотоэффекту — образованию нейтронов посредством взаимодействия виртуальных фотонов мюона с ядром в основном в области гигантского дипольного резонанса (ГДР). Составляющая  $Y_n^h$  представляет нейтроны адронных ( $h$ ) ливней, генерируемых также виртуальными фотонами ультрарелятивистских мюонов в глубоко неупругих фотоядерных  $\gamma N$ -реакциях. Обе составляющие (и, следовательно, компонента  $Y_n^{ph}$  в целом) связаны с ядерными потерями мюонов, относительная величина которых  $b_n = 4 \cdot 10^{-7}$  (см<sup>2</sup>/г) практически постоянна в широком интервале энергий мюонов  $10-10^4$  ГэВ. Компонента  $Y_n^{em}$  соответствует нейтронам из электронно-фотонных ливней, образуемых мюонами в веществе посредством  $\delta$ -электронов,  $e^+e^-$ -пар и тормозных  $\gamma$ -квантов.

При энергиях  $40 < \bar{E}_\mu < 400$  ГэВ ( $H > 100$  м в.э.) компоненты для всех  $A$  связаны неравенствами:

$$Y_n^{em} \gg Y_n^v, Y_n^h > Y_n^{em} + Y_n^v. \quad (14)$$

Как следует из неравенств (14), в полном выходе доминируют нейтроны из  $h$ -ливней. Нейтроны в  $h$ -ливне образуются, главным образом, в

$\pi A$ -взаимодействиях ливневых заряженных пионов  $\pi_s^\pm$ . Роль  $K$ -мезонов в развитии  $h$ -ливня невелика из-за меньшего сечения неупругого  $KN$ -взаимодействия и более короткого по сравнению с  $\pi^\pm$  временем жизни. Механизм генерации нейтронов в неупругих  $KA$ -столкновениях аналогичен образованию нейтронов ливневыми пионами. В состав адронного ливня входят и  $\pi_s^0$ , иницирующие и поддерживающие развитие электромагнитного субливня ( $em$ -субливня). Нейтроны в  $em$ -субливне образуются в основном в реакции фоторождения реальными фотонами ливня. В зависимости от энергии  $h$ -ливня, в  $em$ -субливне через  $\pi_s^0$ -мезоны «перекачивается» от  $\sim 30\%$  до  $\sim 80\%$  энергии  $h$ -ливня. Максимальная доля нейтронов  $em$ -субливня в любом веществе не больше  $15\%$  от полного числа нейтронов в  $h$ -ливне [Мал86]. Энергия  $h$ -ливней, генерируемых мюонами под землей, в среднем не превышает  $40$  ГэВ. При таких энергиях доля нейтронов  $em$ -субливней меньше  $7\%$ . Ввиду их небольшого количества, генерацией нейтронов в  $em$ -субливнях можно пренебречь. Некоторый вклад в число нейтронов в  $h$ -ливне дают «подпороговые»  $\pi^\pm$  с энергией  $\leq 500$  МэВ, неспособные эффективно производить пионы в  $\pi A$ -столкновении, но образующие нейтроны в неупругом  $\pi A$ -рассеянии и  $\pi^-A$ -захвате.

По своему происхождению нейтроны в  $h$ -ливне делятся на «каскадные» ( $cas$ ) и «испарительные» ( $ev$ ). Каскадные нейтроны образуются в быстрой фазе  $\pi_s A$ -взаимодействия в результате развития нуклонного внутриядерного каскада. Каскад вызывается нуклоном отдачи при столкновении ливневого пиона с нуклоном ядра. Испарительные нейтроны появляются в последующей, более медленной фазе  $\pi_s A$ -взаимодействия. Они излучаются возбужденными остаточными ядрами  $A_r^* = A - n_{cas}$  после выхода из них каскадных нуклонов ( $n_{cas}$  — число каскадных нуклонов, выходящих из ядра  $A$  в одном  $\pi_s A$ -столкновении). Набор ядер  $A_r$  в  $h$ -ливне довольно широк, так как  $A > n_{cas} > 0$ . Среднее число  $\bar{n}_{ev}$  на  $\pi_s A$ -взаимодействие, как и среднее число  $\pi_s A$ -взаимодействий в  $h$ -ливне фиксированной энергии, слабо зависит от  $A$  [Бар72]. Средняя множе-

ственность испарительных нейтронов  $\bar{n}_{ev}$  в одном  $\pi_s A$ -столкновении в  $h$ -ливнях определяется набором остаточных ядер  $A_r$ . Он характеризуется средним значением  $\bar{A}_r$ , связанным с  $A$ , и неравенством  $\bar{A}_r < A$ . Таким образом, число нейтронов  $\bar{N}_n = k (\bar{n}_{cas} + a\bar{n}_{cas} + \bar{n}_{ev}) = k n_n$  в  $h$ -ливне относится к ядру  $A$ , причем  $\bar{n}_{cas}$  связано с ядром  $A$ , а  $\bar{n}_{ev}$  — с ядром  $\bar{A}_r$ . Здесь  $k$  — среднее количество  $\pi_s A$ -неупругих взаимодействий, которое слабо зависит от  $A$ . Слагаемое  $a\bar{n}_{cas}$  ( $a \ll 1$ ) представляет число нейтронов, образующихся в столкновении каскадного нуклона с ядром  $A$ . При любых  $A$  величина  $\bar{n}_{ev}$  больше числа  $(1+a)\bar{n}_{cas}$  примерно в 2 раза. Энергетической границей между cas- и ev-нейтронами условно принято считать величину 30 МэВ, равную приблизительно энергии Ферми в ядре. При энергии больше 30 МэВ каскадные нейтроны могут размножаться в веществе в отличие от cas-протонов, быстро теряющих энергию за счет ионизационных потерь. Средняя энергия ev-нейтронов  $T_n^{ev} \sim 3-7$  МэВ, вследствие чего размножение ev-нейтронов также подавлено.

Энергетический спектр космогенных нейтронов до 30 МэВ формируется испарительными нейтронами  $h$ - и  $et$ -ливней, выше 30 МэВ — в основном каскадными нейтронами из  $h$ -ливней.

### 1.3.1. Выход заряженных пионов в $h$ -ливнях

Пренебрегая нейтронами в  $et$ -субливне, можно полагать, что выход  $Y_n^h$  целиком зависит от числа заряженных пионов в  $h$ -ливне. В таком случае выход нейтронов  $Y_n^h$  определяется выходом пионов  $Y_\pi^\pm$ , выражение для которого имеет такую же форму, как и  $Y_n$  (8):

$$Y_\pi^\pm = \frac{\mathcal{N}_A}{A} \langle \sigma_{\mu A}^h v_\pi^\pm \rangle, \quad (15)$$

$\sigma_{\mu A}^h$  — сечение образования  $h$ -ливня,

$v_\pi^\pm$  — множественность заряженных пионов в  $h$ -ливне, то есть число ливневых заряженных пионов, проинтегрированное по глубине ливня.

Сечение  $\sigma_{\mu A}^h$  записывается в виде

$$\sigma_{\mu A}^h = \sigma_{\mu N} \cdot A^{\alpha_0}, \quad (16)$$

$\sigma_{\mu N}$  — сечение глубоконеупругого взаимодействия мюона с нуклоном,  $\alpha_0 \leq 1$  — фактор нуклонного затенения.

В диапазоне энергий  $E_\mu$   $10$ – $10^3$  ГэВ сечение  $\sigma_{\mu N}$  постоянно:  $\sigma_{\mu N} = 1.1 \cdot 10^{-28}$  см<sup>2</sup> [NPP06]. Эффект затенения определяется совместным действием квадрата передаваемого четырехмерного импульса  $q^2$  и передаваемой энергий  $\varepsilon_h$ . Из экспериментальных данных следует, что в области значений переменной  $x = (q^2/2m\varepsilon_h) < 0.1$  ( $m$  — масса нуклона), которой характеризуется глубоконеупругое фотоядерное взаимодействие космических мюонов, величина  $\alpha_0$  составляет 0.96 [May75].

Преобразуем выражение (15), используя (16) и полагая  $\alpha_0 = 1$ :

$$Y_\pi^\pm(E_\mu, A) = \frac{\mathcal{N}_A}{A} \langle \sigma_{\mu N} A^{\alpha_0} v_\pi^\pm \rangle = \mathcal{N}_A \sigma_{\mu N} \langle v_\pi^\pm \rangle = N_{\mu N} \langle v_\pi^\pm \rangle \text{ см}^2/\Gamma. \quad (17)$$

Произведение  $\mathcal{N}_A \sigma_{\mu N}$  задает число глубоконеупругих  $\mu A$ -взаимодействий  $N_{\mu N}$  в одном грамме вещества, которое в диапазоне энергий  $\bar{E}_\mu = 40$ – $400$  ГэВ не зависит ни от  $E_\mu$ , ни от  $A$ , так как  $\sigma_{\mu N} = \text{const}$ .

Очевидно, что выход  $Y_\pi^\pm$  связан с ядерными потерями мюонов  $b_n$ , которые определяются формулой:

$$b_n = \frac{\mathcal{N}_A}{E_\mu A} \int_0^{E_\mu} \varepsilon_h d\sigma_{\mu A}^h(E_\mu, \varepsilon_h). \quad (18)$$

Здесь пренебрегается потерями, связанными с ядерным фотоэффектом, создающим компоненту  $Y_n^v$ . Все ядерные потери относятся на счет генерации  $h$ -ливней, что справедливо при ультрарелятивистских энергиях мюонов. Переходя в подынтегральном выражении к средней энергопередаче мюона  $\bar{\varepsilon}_h$  и учитывая (16), при  $\alpha_0 = 1$  получаем:

$$b_n = \mathcal{N}_A \frac{\bar{\varepsilon}_h}{E_\mu} \sigma_{\mu N} = N_{\mu N} \frac{\bar{\varepsilon}_h}{E_\mu} \text{ см}^2/\Gamma. \quad (19)$$

Величина  $b_n$  постоянна в интервале  $E_\mu$  ( $10$ – $10^3$ ) ГэВ. Она известна с высокой точностью  $b_n = 4.0 \cdot 10^{-7}$  см<sup>2</sup>·Г<sup>-1</sup> [NPP06]. Следовательно, доля средней энергопередачи мюона  $\bar{\varepsilon}_h/E_\mu$  в адронный ливень в одном  $\mu N$ -столкновении составляет в расчете на г/см<sup>2</sup> постоянную величину

$$\bar{\varepsilon}_h/E_\mu = b_n / \mathcal{N}_A \sigma_{\mu N} = 6.1 \cdot 10^{-3}. \quad (20)$$

Выражения (19) и (17) имеют одинаковую форму и размерность с тем отличием, что множественность  $\langle v_{\pi}^{\pm} \rangle$ , является числом только заряженных пионов в ливне  $\bar{\varepsilon}_h$ , содержащем и нейтральные пионы. Известно, что число заряженных пионов в ливне можно выразить зависимостью  $v_{\pi}^{\pm} \sim E_{\mu}^{\alpha\pi}$  [Bar52]. Тогда, умножая обе части уравнения (19) на  $E_{\mu}^{\alpha\pi}$ , получаем энергию, заключенную в заряженной компоненте ядерных потерь мюона:

$$b_n E_{\mu}^{\alpha\pi} = N_{\mu N} \left( \frac{\bar{\varepsilon}_h}{E_{\mu}} E_{\mu}^{\alpha\pi} \right) \quad (21)$$

Сомножитель  $\frac{\bar{\varepsilon}_h}{E_{\mu}} E_{\mu}^{\alpha\pi}$  задает энергию заряженной компоненты ливня  $\varepsilon_h^{\pm}$  с числом пионов  $\langle v_{\pi}^{\pm} \rangle$ . Энергия делится, распределяясь между ливневыми пионами  $\pi_s^{\pm}$  в актах глубоконеупругого  $\pi_s N$ -рассеяния. Пренебрегая распадами ливневых  $\pi_s^{\pm}$  на лету, можно считать, что вся энергия заряженной компоненты  $h$ -ливня расходуется на ионизационные потери пионов  $\varepsilon_{\pi}^{\text{ion}}$ , расщепление ядер  $E_{dis}$  в  $\pi_s A$ -взаимодействиях и массу  $m_{\pi} c^2$  заряженных пионов. Величина  $\varepsilon_{1\pi}^{\text{ion}}$  является энергопотерей ливневого пиона на длине его поглощения  $\lambda_{\pi}$  в глубоконеупругих  $\pi_s A$ -реакциях множественного рождения пионов. Длина  $\lambda_{\pi}$  практически не зависит от энергии ливневых пионов  $E_{\pi}$  и слабо растет при увеличении  $A$ . Подобным образом изменяется величина  $E_{dis}$  [Гри58, Пау62]. Энергию, затрачиваемую на один пион, можно представить суммой  $\varepsilon_{1\pi}^{\text{ion}} + E_{dis} + m_{\pi} c^2 = \varepsilon_{1\pi}$ , тогда

$$\varepsilon_{1\pi} \cdot \langle v_{\pi}^{\pm}(E_{\mu} A) \rangle = \frac{\bar{\varepsilon}_h \cdot E_{\mu}^{\alpha\pi}}{E_{\mu}}. \quad (22)$$

При фиксированной энергии  $E_{\mu}$  правая часть уравнения (22) — константа. Зависимость множественности  $\langle v_{\pi}^{\pm}(A) \rangle$  в виде  $A^{\beta\pi}$  при  $\beta_{\pi} = 0.14 \pm 0.03$  была определена в эксперименте [Меу63] для энергий 20–27 ГэВ.

Следовательно,  $\varepsilon_{1\pi} \propto 1/A^{\beta\pi}$ . Таким образом, зависимость  $v_{\pi}^{\pm}$  от  $A$  заключена в величине  $\varepsilon_{1\pi}$ :

$$\left\langle v_{\pi}^{\pm}(E_{\mu}, A) \right\rangle = \frac{\bar{\varepsilon}_{\pi}}{E_{\mu}} \frac{E_{\mu}^{\alpha_{\pi}}}{\varepsilon_{1\pi}}. \quad (23)$$

Вводя в (23) зависимость  $\varepsilon_{1\pi}$  от  $A$ , получаем

$$\left\langle v_{\pi}^{\pm}(E_{\mu}, A) \right\rangle = \frac{\bar{\varepsilon}_{\pi}}{E_{\mu}} E_{\mu}^{\alpha_{\pi}} A^{\beta_{\pi}}. \quad (24)$$

Подставляя (24) в (17) и учитывая (19), приходим к выражению

$$Y_{\pi}^{\pm}(E_{\mu}, A) = b_n E_{\mu}^{\alpha_{\pi}} A^{\beta_{\pi}}. \quad (25)$$

Величина показателя  $\alpha_{\pi} = 0.75$  для заряженных пионов в  $h$ -ливнях на основе экспериментальных данных впервые была указана в [Bar52] и подтверждена затем в расчетах [Gru72]. Полагая  $\alpha_{\pi} = 0.75$  и  $\beta_{\pi} = 0.14$ , для выхода  $Y_{\pi}^{\pm}$  получаем:

$$Y_{\pi}^{\pm} = b_n E_{\mu}^{0.75} A^{0.14}. \quad (26)$$

В работе [Ale73] число положительных пионов  $N_{\pi}^{+}(\text{см}^2 \Gamma^{-1})$  в  $h$ -ливнях, развивающихся в грунте, авторами было связано с потерями  $b_n$  выражением:

$$N_{\pi}^{+} = b_n n_0 E_{\mu}^{0.75}, \quad (27)$$

$n_0 = 0.4$  — безразмерный подгоночный параметр,  $b_n = 5.7 \cdot 10^{-7} \text{см}^2 \Gamma^{-1}$  [Ale73].

В работе [Wan01] с помощью программного пакета FLUKA для выхода  $Y_{\pi}^{+}$  в жидком сцинтилляторе (ЖС) было получено:

$$Y_{\pi}^{+} = 4.45 \cdot 10^{-7} E_{\mu}^{0.80}. \quad (28)$$

Можно видеть, что формулы (26), (27), (28) при фиксированном  $A$  подобны друг другу. В [Del95] выход  $Y_{\pi}^{+}$  в ЖС был рассчитан аналитически для глубин 20, 100, 500 м в.э., которым в [Wan01] были сопоставлены энергии  $E_{\mu}$  10.3, 22.4, 80 ГэВ. Сравним величины выхода  $Y_{\pi}^{+}$  в ЖС ( $A = 10.3$ ), получаемые по разным формулам при  $E_{\mu} = 80$  ГэВ:

$Y_{\pi}^{+} = 0.86 \cdot 10^{-5}$  [Del95];  $1.48 \cdot 10^{-5}$  [Wan01];  $Y_{\pi}^{+} = 1/2 Y_{\pi}^{\pm} = 0.74 \cdot 10^{-5}$  (по формуле (26) в предположении  $Y_{\pi}^{+} = Y_{\pi}^{-}$ ). Разброс величин выхода нельзя объяснить влиянием структуры ядра, по-разному включаемой в расчеты, так как энергия множественной генерации пионов гораздо выше энергии внутриядерных эффектов. Поэтому величины выхода  $Y_{\pi}$  для разных  $A$ , рассчитанные в рамках одного подхода при фиксированной энергии  $E_{\mu}$ , должны монотонно следовать закону  $Y_{\pi} = c_{\pi} A^{\beta_{\pi}}$ . В таком случае величины  $Y_{\pi}$ , например для ядер-изобар, должны быть одинаковыми. Разброс выше приведенных величин  $Y_{\pi}$  свидетельствует о значительных неопределенностях расчетов. Это отражается в разбросе величины показателя  $\alpha$  от 0.62 до 0.79, получаемой разными авторами методом Монте-Карло.

### 1.3.2. Выход нейтронов в $h$ -ливнях

Выход нейтронов  $Y_n^h$  (8), подобно выходу пионов  $Y_{\pi}^{\pm}$  (17), можно преобразовать к виду

$$Y_n^h = N_{\mu N} \langle v_n^h \rangle.$$

Множественность  $\langle v_n^h \rangle$  представляет все нейтроны, образуемые пионами  $v_{\pi}^{\pm}$  в  $h$ -ливне с энергией  $\bar{\varepsilon}_h$ . Нужно отметить, что генерация  $h$ -ливней относится к 1 г вещества, в то время как число нейтронов (и пионов) является суммарным по всей длине развития ливня  $\bar{\varepsilon}_h$ . Зависимость множественности  $v_n^h$  от  $E_{\mu}$  и  $A$  можно факторизовать:

$$\langle v_n^h(E_{\mu}, A) \rangle = c_n E_{\mu}^{\alpha_n} A^{\beta}.$$

Как следует из экспериментов, средняя множественность нейтронов  $n_n$  в  $\pi A$ -неупругом столкновении пренебрежимо слабо связана с энергией ливневого пиона и определяется в основном массовым числом  $A$  [Гри58], [Пау62], [Бар72]. Поэтому, во-первых, зависимость  $v_n^h(A) \propto A^{\beta}$  включает в себя зависимость от  $A$  как множественности пионов  $A^{\beta_{\pi}}$ , так и числа нейтронов в  $\pi A$ -взаимодействии  $A^{\beta_n}$ :  $\beta = \beta_{\pi} + \beta_n$ . Во-вторых,

зависимость от энергии  $\nu_n^h(E_\mu)$  определяется зависимостью  $\nu_\pi^\pm$  от  $E_\mu$ , что приводит к равенству  $\alpha_n = \alpha_\pi$ . Кроме того, поскольку множественность  $\nu_n^h$  задает число нейтронов в ливне  $\bar{\varepsilon}_h$ , то  $c_n = \frac{\bar{\varepsilon}_h}{E_\mu}$ . Следовательно,  $\langle \nu_n^h(E_\mu, A) \rangle = \frac{\bar{\varepsilon}_h}{E_\mu} E_\mu^{\alpha_\pi} A^{\beta_\pi} A^{\beta_n}$ .

Подставляя эту формулу в выражение для  $Y_n^h$  с учетом (19) получаем выражение для выхода нейтронов в  $h$ -ливнях, генерируемых мюоном:

$$Y_n^h(E_\mu, A) = b_n E_\mu^{\alpha_\pi} A^{\beta_\pi} A^{\beta_n}. \quad (29)$$

Используя формулу (25), его можно привести к виду:

$$Y_n^h = Y_\pi^\pm A^{\beta_n}. \quad (30)$$

Экспериментальные данные и результаты расчетов зависимости  $n_n(A)$  в рамках модели внутриядерного нуклонного каскада хорошо описываются функцией  $A^{\beta_n}$  с показателем  $\beta_n = 0.75 \pm 0.10$  [Бар72].

Подставляя в (29) значения показателей  $\alpha_\pi$  и  $\beta_\pi$  из выражения (26), окончательно получаем:

$$Y_n^h = b_n E_\mu^{0.75} A^{0.89}, \quad b_n = 4.0 \cdot 10^{-7}. \quad (31)$$

Показатель  $\alpha_\pi = 0.75$  не зависит от  $E_\mu$  и  $A$  в диапазоне энергий мюонов  $\bar{E}_\mu$  и массовых чисел  $A$  материалов, используемых в подземных экспериментах. Его величина обоснована теоретически и с высокой достоверностью подтверждена большим числом измерений. Показатель  $\beta = 0.89$  в  $Y_n^h$  является суммой  $\beta = \beta_\pi + \beta_n$ . Величины  $\beta_\pi$  и  $\beta_n$  получены на основе экспериментальных данных. Постоянство величин  $b_n$  и  $\alpha_\pi$  в выражении для  $Y_n^h$  задает неизменность показателя  $\beta$  в этой формуле.

#### 1.4. Феноменология выхода нейтронов в электромагнитных ливнях

Несмотря на то, что в  $em$ -ливне образуется небольшое число нейтронов, благодаря большей по сравнению с  $h$ -ливнями частоте генерации  $em$ -ливни дают сравнимый с  $h$ -ливнями вклад в полный выход космоген-

ных нейтронов. Мюон инициирует  $em$ -ливень посредством  $\delta$ -электрона,  $\gamma$ -кванта тормозного радиационного излучения ( $r$ ) или  $e^+e^-$ -пары ( $p$ ). Вне зависимости от происхождения,  $em$ -ливень состоит из электронов  $e^+, e^-$  и ливневых  $\gamma$ -квантов (фотонов). При высоких энергиях  $E_\mu$  в составе  $em$ -ливней появляются адронные  $h$ -субливни, инициируемые ливневыми фотонами в реакциях фоторождения пионов. Вероятность этого процесса при небольших энергиях 10–30 ГэВ, которыми характеризуются  $em$ -ливни от мюонов под землей, невелика из-за крутого падающего спектра ливневых фотонов  $\propto 1/\varepsilon_\gamma^2$ . Ниже вклад  $h$ -субливней в величину выхода  $Y_n^{em}$  учитываться не будет.  $Em$ -ливни разного происхождения отличаются друг от друга частотой появления (в зависимости от сечений  $\sigma_{\mu A}^\delta, \sigma_{\mu A}^r, \sigma_{\mu A}^p$ ) и длиной развития ливня  $L_{sh}^{em}$ , которая в данном веществе пропорциональна  $\ln \varepsilon_{sh}$ , где  $\varepsilon_{sh}$  — энергия ливня.

Число заряженных частиц в ливне  $N_{sh}^e$  пропорционально энергии  $\varepsilon_{sh}$ , как и число ливневых фотонов, но число фотонов  $N_{sh}^\gamma$  с энергией выше 10 МэВ в 2–3 раза больше  $N_{sh}^e$ . Средняя энергия  $\delta$ -ливней  $\bar{\varepsilon}_{sh}^\delta$ , распределенных по закону  $N(\varepsilon_{sh}^\delta) \propto 1/(\varepsilon_{sh}^\delta)^2$ , в зависимости от вещества имеет величину  $\bar{\varepsilon}_{sh}^\delta \approx (10^{-3} - 10^{-2}) E_\mu$ ; ливней, образованных тормозными  $\gamma$ -квантами, —  $\bar{\varepsilon}_{sh}^r \approx 0.1 E_\mu$  (при распределении  $N(\varepsilon_{sh}^r) \propto 1/\varepsilon_{sh}^r$ ) и ливней от  $e^+e^-$ -пар —  $\bar{\varepsilon}_{sh}^p \approx \frac{m_e}{m_\mu} E_\mu \approx 5 \cdot 10^{-3} E_\mu$ .

В отличие от  $h$ -ливней практически вся энергия  $em$ -ливней расходуется на ионизационные потери. Затраты энергии на ядерные эффекты незначительны, порядка 0.1%. Доминирующим процессом образования нейтронов в  $em$ -ливнях является  $\gamma A$ -фоторождение, так как его сечение в  $\sim 10^2$  раз больше сечения электроядерных  $eA$ -реакций и  $N_{sh}^\gamma > N_{sh}^e$ . Механизм  $\gamma A$ -взаимодействия зависит от соотношения длины волны  $\gamma$ -кванта  $\lambda_\gamma$  и размера ядра  $R_A$ . До энергии квантов  $E_\gamma \approx 30$  МэВ длина волны  $\lambda_\gamma > R_A$  для самых больших  $A$ , и  $\gamma$ -квант взаимодействует с ядром как с целым. Сечение фотопоглощения в этом энергетическом диапазоне имеет резонансную форму. Область гигантского дипольного резонанса находится в энергетическом диапазоне от энергии связи ну-

клона  $\sim 8$  МэВ до, в зависимости от ядра,  $\sim 30$  МэВ. Положение максимума ГДР приблизительно определяется выражением  $E_\gamma^{\max} \approx 40 A^{-0.2}$  МэВ. Начиная с  $E_\gamma \sim 50$  МэВ длина волны  $\lambda_\gamma$  становится сравнимой с межнуклонным расстоянием в ядре и квант поглощается квазидейтроном внутри ядра. Выше энергии  $m_\pi c^2 = 140$  МэВ начинает преобладать рождение пионов на нуклоне ядра. Наибольший вклад в выход нейтронов среди процессов фоторождения дает ГДР, определяющий испарительный спектр нейтронов. Полное сечение фотопоглощения  $\sigma_\alpha$  ниже порога рождения пионов дается формулой:

$$\sigma_\alpha = \int_0^{m_\pi c^2} \sigma_{\gamma\alpha} dE_\gamma \approx 60 \frac{NZ}{A} 10^{-27} \text{ см}^2 \cdot \text{МэВ}. \quad (32)$$

Вследствие большой ширины ГДР и расположения его максимума на шкале энергий выход фотонейтронов в *em*-ливнях слабо зависит от формы энергетического спектра ливневых фотонов  $P(\varepsilon_\gamma) \propto 1/\varepsilon_\gamma^2$  и определяется их количеством. Поскольку число фотонейтронов, образующихся в *em*-ливнях, пропорционально числу фотонов  $N_{\text{sh}}^\gamma \propto \varepsilon_{\text{sh}}$ , а количество генерируемых мюоном ливней определяется сечением  $\sigma_{\mu A}^{em}$ , то выход нейтронов  $Y_n^{em}$  пропорционален энергопотерям мюона:

$$Y_n^{em} \propto \left( \frac{dE_\mu}{dx} \right)^{em}. \quad (33)$$

Полные средние энергопотери мюона в *em*-процессах выражаются формулой

$$\left( \frac{dE_\mu}{dx} \right)^{em} = k_\delta(E_\mu, A) + [b_r(E_\mu, A) + b_p(E_\mu, A)] E_\mu, \quad (34)$$

где  $k_\delta$ ,  $b_r$ ,  $b_p$  — слабо зависящие от  $E_\mu$  функции. Величина потерь  $k_\delta$  при энергии  $E_\mu$  выше 10 ГэВ слабо растет с энергией и практически не зависит от  $A$ :  $k_\delta \propto \frac{Z}{A} \approx \frac{A^{0.96}}{2A} \propto A^{-0.04}$ ; следовательно  $k_\delta \approx \text{const}$ . Величины  $b_r$  и  $b_p$  представляют удельные потери энергии

$$\xi_{r,p} = \left( \frac{1}{E_\mu} \frac{dE_\mu}{dx} \right)_{r,p} = \frac{N_A}{E_\mu A} \int_0^{E_\mu} \varepsilon_{r,p} \sigma_{r,p}(E_\mu, \varepsilon) d\varepsilon \quad (35)$$

$\varepsilon_{r,p}$  — энергия  $\gamma$ -кванта или пары,  $\sigma_{r,p}$  — сечения соответствующих про-

цессов. Используя эффективные сечения  $\sigma_{r,p}^{\text{эфф}}$  и соответствующие средние значения  $\bar{\varepsilon}_{r,p}$ , выражение (35) можно привести к виду:

$$b_{r,p} = N_{\mu A}^{r,p} \bar{\varepsilon}_{r,p}. \quad (36)$$

Величины удельных потерь  $b_r$  и  $b_p$  в диапазоне изменения средней энергии мюонов под землей 40–400 ГэВ можно считать не зависящими от  $E_\mu$ . В этом случае полные потери  $\left(\frac{dE_\mu}{dx}\right)_{r,p}$  пропорциональны  $E_\mu$ . Со свойствами вещества эти потери связаны зависимостью

$$\frac{Z^2}{A} \approx \frac{A^{0.94}}{4} \propto A^{0.94}. \quad (37)$$

Для определения выхода нейтронов  $Y_n^{em}$  в правую часть выражения (33) следует ввести коэффициент  $v_n^{\gamma A}(A)$ , учитывающий множественность нейтронов, образующихся при  $\gamma A$ -поглощении. Тогда, подставляя в (33) формулу для потерь (34), получаем выражение для выхода нейтронов в электромагнитных процессах:

$$Y_n^{em}(E_\mu, A) = c^{em} v_n^{\gamma A}(A) [k_\delta + b_r(A) E_\mu^{1.0} + b_p(A) E_\mu^{1.0}], \quad (38)$$

здесь  $c^{em}$  – константа, учитывающая долю  $em$ -потерь на генерацию нейтронов.

Для функции генерации нейтронов  $\sigma_a v_n^{\gamma A}$  в области ГДР была получена аппроксимация  $\sigma_a v_n^{\gamma A} = 0.52 \cdot 10^{-27} A^{1.8} \text{ МэВ см}^2$  [Jon53]. Сравнивая эту формулу с выражением (32) и полагая  $NZ/A \approx A^{1.0}/4 \propto A^{1.0}$ , для множественности фотонейтронов  $v_n^{\gamma A}$  в акте  $\gamma A$ -поглощения получаем зависимость  $v_n^{\gamma A} = c_{\gamma A} A^{0.8}$ . Этой зависимостью характеризуется множественность фотонейтронов в  $em$ -ливнях с любой энергией  $\varepsilon_{sh}$ . Преобразуем выражение (38), в соответствии с (37) полагая  $b_r(A) \approx a_r A^{1.0}$ ,  $b_p(A) \approx a_p A^{1.0}$  ( $a_r, a_p$  — const) и используя зависимость  $v_n^{\gamma A} = c_{\gamma A} A^{0.8}$ :

$$Y_n^{em}(E_\mu, A) = c^{em} c_{\gamma A} k_\delta A^{0.8} + c^{em} c_{\gamma A} a_r A^{1.8} E_\mu^{1.0} + c^{em} c_{\gamma A} a_p A^{1.8} E_\mu^{1.0}. \quad (39)$$

Объединяя здесь константы в коэффициенты  $c_\delta, c_r, c_p$ , соответствующие разным каналам генерации нейтронов, получаем зависимость

выхода  $Y_n^{em}$  от  $E_\mu$  и  $A$ :

$$Y_n^{em}(E_\mu, A) = c_\delta A^{0.8} + c_r A^{1.8} E_\mu^{1.0} + c_p A^{1.8} E_\mu^{1.0}. \quad (40)$$

В это выражение, представляющее выход нейтронов только в *em*-ливнях, следует включить член, относящийся к генерации нейтронов мюоном посредством виртуальных фотонов, спектр которых подобен спектру тормозного излучения  $1/E_\gamma$ . Несмотря на более жесткий относительно реальных фотонов в *em*-ливнях спектр, виртуальные фотоны производят подавляющую часть нейтронов также через ГДР благодаря его большой ширине 2–8 МэВ и слабой зависимости максимума от  $A$ :  $E_\gamma^{\max} \approx 40A^{-0.2}$ . Вследствие этого генерация нейтронов виртуальными фотонами, которая практически не зависит от  $E_\mu$ , определяется величиной  $A$ , и выражение для выхода  $Y_n^v$  принимает вид, аналогичный выражению для выхода нейтронов в  $\delta$ -ливнях:

$$Y_n^v = c_v A^{0.8}, \quad (41)$$

Включая (41) в (40), получаем выход нейтронов во всех процессах за исключением *h*-ливней:

$$Y_n^\phi = (c_\delta + c_v) A^{0.8} + (c_r + c_p) A^{1.8} E_\mu^{1.0}. \quad (42)$$

Компоненты этого выражения имеют общую черту: они представляют нейтроны, образующиеся в результате ядерного фотоэффекта. Входящие в (42) константы связаны соотношениями  $c_\delta \gg c_v$ ,  $c_r \approx c_p$ . Эти нейтроны выходят из основных ядер вещества, в отличие от *h*-ливней, в которых испарительные нейтроны выходят из ядер-остатков. Начиная с энергии  $E_\mu \sim 100$  ГэВ и  $A \sim 27$ , в выходе (42) доминирует второй член, поэтому выражение (42) можно представить в виде, аналогичном компоненте выхода  $Y_n^h$  (31):

$$Y_n^\phi = c E_\mu^\alpha A^\beta, \quad (43)$$

где  $c$  — константа,  $0.8 < \beta < 1.8$ ,  $\alpha < 1$ .

Величина суммарных потерь мюонов при энергиях  $E_\mu > 100$  ГэВ

в  $em$ -взаимодействиях примерно на порядок больше потерь  $b^h$ . Кроме того, число фотонов в  $em$ -ливнях от мюонов с энергией  $E_\mu$  на полтора порядка больше числа  $\pi_s^\pm$  в  $h$ -ливнях, образуемых мюонами той же энергии. Тем не менее, при энергиях  $E_\mu > 100$  ГэВ  $Y_n^h > Y_n^{em}$ . Это объясняется двумя причинами: а) для средних  $A$  сечение неупругого  $\pi_s^\pm A$ -рассеяния в  $\sim 15$  раз больше сечения  $\gamma A$ -поглощения фотонов в  $em$ -ливнях; б) множественность нейтронов  $\nu_n^{\pi A}$  в расчете на одно  $\pi^\pm A$ -взаимодействие превышает  $\nu_n^{\gamma A}$  для  $\gamma A$ -поглощения в  $\sim 20$  раз. В результате затраты энергии на образование нейтронов в  $em$ -ливне составляют  $\sim 0.1\%$ , в то время как в  $h$ -ливне такой же энергии, развивающемся в таком же веществе, — около  $3\%$ .

### 1.5. Зависимость выхода $Y_n$ от структуры ядра

Компонента выхода  $Y_n^h$  практически не зависит от внутриядерных эффектов. Это объясняется механизмом образования нейтронов в  $h$ -ливнях. Во-первых, множественность  $\bar{n}_{cas}$  не связана со структурой ядра, так как средняя энергия каскадных нуклонов  $\bar{T}_{cas} \sim 150$  МэВ гораздо выше энергии ядерных эффектов. Во-вторых, множественность  $\bar{n}_{ev}$  является средней по набору остаточных ядер  $\bar{A}_r < A$  в ливне. В силу этого величина  $\bar{A}_r$  связана с массовым числом  $A$  ядра вещества, но не с его структурой. Таким образом, число нейтронов  $n_n = \bar{n}_{cas} + a\bar{n}_{cas} + \bar{n}_{ev}$ , не зависит от структуры ядер  $A$ , и рассчитываемые выходы  $Y_n^h$  для различных  $A$  при фиксированной энергии  $E_\mu$  не должны значительно отклоняться от закона  $Y_n^h \propto A^\beta$ . Небольшой разброс величин  $Y_n^h$  возникает за счет фоторождения нейтронов в  $em$ -субливнях, а также образования  $a \cdot n_{cas}$  нейтронов в прямых реакциях скалывания с участием каскадных нуклонов  $nA \rightarrow nn(A-1)$ ,  $pA \rightarrow np(A-1)$ . Выход нейтронов в этих реакциях зависит от структуры ядра, но его вклад в величину  $Y_n^h$  в соответствии с сечением этих реакций не превышает единиц процентов. Очевидно, что разброс значений  $Y_n^h$ , вызываемый этими процессами, еще меньше.

По сравнению с  $Y_n^h$  компоненты выхода  $Y_n^{em}$  и  $Y_n^v$  сильнее зави-

сят от структуры ядра. Основным каналом генерации нейтронов в этих компонентах является фоторождение посредством ГДР. Максимумы сечений этой реакции у различных ядер находятся в интервале 13–25 МэВ. При таких энергиях проявляется роль внутриядерных эффектов, определяющих устойчивость ядер и влияющих на выход нейтронов. К ним относится, в первую очередь, заполненность нуклонных оболочек и связанная с ней энергия отрыва нейтрона. Кроме этого, как указано в [Нед89], к нарушению монотонности зависимости выхода фотонейтронов от  $A$  приводит большая вероятность выхода  $\alpha$ -частиц в фотоядерных реакциях для некоторых элементов. За счет этого кислород, железо и вольфрам имеют бóльшие значения выхода фотонейтронов по сравнению, соответственно, с алюминием, никелем и свинцом. Внутриядерные эффекты могут увеличить разброс получаемых величин выхода  $Y_n$ , если в расчете доминирует вклад компонент  $Y_n^{em}$  и  $Y_n^v$ . В таком случае расчетные значения  $Y_n$ , например для ядер-изобар, могут заметно отличаться друг от друга и отклоняться от генеральной зависимости  $A^\beta$ . Но это будет указывать на нарушение базового неравенства  $Y_n^h > Y_n^{em} + Y_n^v$ .

### 1.6. Роль переходного эффекта при измерении выхода

В подземных экспериментах установки всегда окружены грунтом, а детекторы как правило — материалами пассивной или активной защиты, входящими в состав установки. Как указывалось выше, в области энергии мюонов больше  $\sim 40$  ГэВ подавляющая часть нейтронов образуется в ливнях, генерируемых мюонами. При измерении выхода нейтронов  $Y_n$  под землей мишень пересекают ливни, образуемые мюонами как в самой мишени, так и в окружающем ее веществе. Переходной эффект (ПЭ) для выхода космогенных нейтронов заключается во влиянии окружающего вещества на величину выхода  $Y_n$  в веществе мишени. В подземных экспериментах ПЭ всегда влияет (в большей или меньшей степени) на измерения выхода космогенных нейтронов, исключить ПЭ

можно только при компьютерном моделировании.

В соответствии с процессами образования нейтронов в ливнях, ПЭ заключается в изменении характеристик  $em$ - и  $h$ -ливней при их переходе из окружающего вещества  $A$  в мишень  $A_t$ . К ПЭ можно отнести также влияние на экспериментальную величину выхода  $^{ex}Y_n(A_t)$  обмена космогенными нейтронами веществ  $A$  и  $A_t$  на их границе, что, по определению, не связано с генерацией нейтронов.

Переходные процессы для  $em$ -ливней определяются радиационной длиной  $t_r$  ( $\text{г}\cdot\text{см}^{-2}$ ) и критической энергией  $\varepsilon^c$  (МэВ), для  $h$ -ливней — длиной свободного пробега пиона до неупругого взаимодействия  $\lambda_\pi = \frac{A}{N_A \sigma_{\pi A}}$  ( $\text{г}\cdot\text{см}^{-2}$ ). Величины  $t_r$  и  $\varepsilon^c$  можно приближенно выразить формулами  $t_r \approx 180 \frac{A}{Z^2}$  ( $\text{г}\cdot\text{см}^{-2}$ ),  $\varepsilon^c \approx 550/Z$  (МэВ), которые с точностью не хуже 20% (для  $t_r$ ) и 10% (для  $\varepsilon^c$ ) справедливы для веществ с зарядом  $13 \leq Z \leq 92$  [Ама81]. Поскольку приблизительно  $Z \propto A$ , из этих выражений следует, что веществу с большим  $A$  соответствуют меньшие величины  $t_r$  и  $\varepsilon^c$ .

Величины  $\lambda_\pi$  и  $t_r$  связаны неравенством  $\lambda_\pi > t_r$ . Их отношение  $\lambda_\pi/t_r$  можно определить, полагая  $\sigma_{\pi A} = \sigma_0 A^\alpha$ , где  $\sigma_0 \approx 27.5 \text{ mb}$  и  $\alpha = 0.78$ :

$$\lambda_\pi/t_r = \left( \frac{A}{N_A \sigma_0 A^\alpha} \right) / \left( \frac{180A}{Z^2} \right) = \frac{Z^2}{180 N_A \sigma_0 A^\alpha} = \frac{0.34 Z^2}{A^{0.78}}. \quad (44)$$

Таким образом, в углероде  $\lambda_\pi$  больше длины  $t_r$  в  $\sim 1.9$  раза, в свинце — в  $\sim 35$  раз. Поскольку длина эффективной области развития  $h$ -ливня  $4\lambda_\pi$ , а  $em$ -ливня — примерно  $12t_r$ , начиная с кислорода длина  $h$ -ливня в ( $\text{г}/\text{см}^2$ ) превышает длину  $em$ -ливня в данном веществе. Это усиливает влияние  $h$ -ливней на измеренную величину  $^{ex}Y_n(A_t)$ .

Роль ПЭ зависит от толщины мишени  $d_t$ : чем больше  $d_t$ , тем меньше ПЭ изменяет величину выхода  $Y_n$ , соответствующую веществу  $A_t$ . Но сверху толщина  $d_t$  ограничена условием «тонкой» мишени. Для измерения выхода  $Y_n$  в потоке мюонов под землей это условие можно выразить неравенством  $\varepsilon_t d_t = \bar{E}_\mu' - \bar{E}_\mu \ll \bar{E}_\mu$ , с которым связано неравенство  $\Delta I_\mu = I_\mu - I_\mu' \ll I_\mu$ ; здесь  $\varepsilon_t$  — удельные энергопотери мюона в слое вещества

$d_t$ . Величины  $\bar{E}_\mu$ ,  $\bar{E}'_\mu$ ,  $I_\mu$ ,  $I'_\mu$  представляют средние энергии и интенсивности потока мюонов при падении на мишень и выходе из нее, причем  $\bar{E}'_\mu > \bar{E}_\mu$ , а  $I'_\mu < I_\mu$ . Минимальная толщина  $d_t$ , при которой можно не учитывать ПЭ, а также получить правильную величину выхода с изолированной мишенью, определяется длиной эффективной области  $h$ -ливня (4–5)  $\lambda_\pi$ , слабо зависящей от энергии ливня  $\sim \ln \epsilon_{sh}^h$ . Эффективная область развития  $em$ -ливня имеет размер (10–15)  $t_r$ , который меньше длины  $4\lambda_\pi$ . Следовательно, при  $d_t < 4\lambda_\pi$  необходимо учитывать влияние ПЭ на величину измеряемого выхода  $Y_n$ .

При измерении выхода нейтронов на его величину могут влиять факторы, не относящиеся непосредственно к переходным процессам, но связанные с окружающим мишень веществом. К ним относятся: а) отличие генерации  $h$ - и  $em$ -ливней в веществах  $A$  и  $A_t$ , б) отличие продольных размеров ливней  $L_{sh}^h$  и  $L_{sh}^{em}$ .

Генерация мюоном  $h$ -ливней определяется макроскопическим сечением глубоконеупругого  $\mu A$ -взаимодействия  $\Sigma_{\mu A}^h$ , которое практически не зависит от  $A$ :  $\Sigma_{\mu A}^h \sim \mathcal{N}_A \sigma_{\mu N}^h$ . В то же время макроскопическое сечение электромагнитного  $\mu A$ -взаимодействия зависит от  $Z$  и  $A$ :  $\Sigma_{\mu A}^{em} \propto Z^2/A$ . Вследствие этого увеличение массового числа  $A$  окружающего вещества относительно  $A_t$  влечет за собой увеличение доли  $em$ -ливней в полном числе генерируемых мюоном ливней. Как правило, при измерении выхода нейтронов  $A \neq A_t$ . В таком случае измерению выхода нейтронов в мишени  $A_t$  толщиной  $d_t < 10 t_r$  соответствует соотношение  $h$ - и  $em$ -ливней, характерное для вещества  $A$ . С другой стороны, длина  $h$ -ливня относительно длины  $em$ -ливня нарастает примерно также (и даже несколько сильнее), как увеличивается отношение сечений  $\Sigma_{\mu A}^{em}/\Sigma_{\mu A}^h \propto Z^2/A$ :

$$L_{sh}^h / L_{sh}^{em} \approx 4 \lambda_\pi / 12 t_r \propto Z^2/A^{0.78}.$$

Таким образом, увеличение (или уменьшение, если  $A < A_t$ ) доли  $em$ -ливней в полном числе ливней, генерируемых мюоном в веществе  $A > A_t$ , при измерении выхода в мишени  $A_t$  с толщиной  $d_t < 10 t_r$ , в зна-

чительной степени компенсируется соответствующим изменением длины  $h$ -ливней, развивающихся в веществе  $A$ . Большая длина  $h$ -ливня по сравнению с длиной  $em$ -ливня такой же энергии влияет на состав потока космогенных нейтронов в грунте на глубине  $H_0$ . Поскольку длина релаксации космогенных нейтронов  $\lambda_n \sim 40 \text{ г/см}^2 \ll L_{sh}$ , нейтроны распределены в соответствии с развитием ливня. Так как  $L_{sh}^h > L_{sh}^{em}$ , доля нейтронов из  $h$ -ливней в полном потоке больше, чем задается соотношением макросечений  $\Sigma_{\mu A}^{em}$  и  $\Sigma_{\mu A}^h$  генерации ливней мюонами с энергией  $\bar{E}_\mu(H_0)$ .

Ниже при анализе влияния ПЭ на компоненты  $Y_n^h$  и  $Y_n^{em}$  будут использоваться термины «экспериментальные» или «измеренные» выходы и соответствующие им обозначения  $^{ex}Y_n^h$ ,  $^{ex}Y_n^{em}$ . Поскольку в измерениях можно получить величину только полного выхода, под этими обозначениями будут пониматься  $h$ - и  $em$ -компоненты в экспериментально определяемой величине полного выхода  $Y_n$ .

Рассмотрим на качественном уровне роль переходных процессов при измерении выхода  $Y_n(A_t)$ .

### 1.6.1. Переходный эффект для нейтронов в $h$ -ливнях

В соответствии с макросечением  $\Sigma_{\mu A}^h$  число  $h$ -ливней, генерируемых мюоном в 1 г вещества, не зависит от  $A$ . От  $A$  зависит количество  $\pi_s^\pm$  (слабо  $\sim A^{0.14}$ ) и число нейтронов, образуемых пионами ( $\sim A^{0.75}$ ). Таким образом, ПЭ для  $h$ -ливней включает в себя изменение числа ливневых  $\pi^\pm$ , изменение множественности  $n_n$  и пограничный обмен нейтронами между  $A$  и  $A_t$ .

Обмен приводит к увеличению измеренного выхода  $^{ex}Y_n^h(A_t)$ , если  $A > A_t$  и некоторому его уменьшению, если  $A < A_t$ . Этот эффект особенно сильно проявляется при небольшой толщине  $d_t$  мишени, когда число генерируемых в мишени нейтронов невелико.

В  $h$ -ливнях образуется около 60% космогенных нейтронов. Поэтому при небольшой толщине мишени  $d_t$  порядка длины релаксации космогенных нейтронов  $\lambda_n \sim (20 \div 50) \text{ г/см}^2$  приграничный обмен нейтронами

$h$ -ливней, в совокупности с подобным эффектом для  $em$ -ливней, наиболее сильно влияет на получаемую величину полного выхода  $^{ex}Y_n(A_t)$ .

Если толщина слоя вещества  $d_A$  больше  $(4-5)\lambda_\pi$ , влияние переходных процессов определяется толщиной  $d_t$ . При  $\lambda_\pi < d_t \leq 4\lambda_\pi$  и  $A > A_t$  измеренный выход  $^{ex}Y_n^h(A_t)$  превысит величину реального выхода  $Y_n^h(A_t)$  вследствие большего числа  $\pi_s^\pm$  и нейтронов, входящих в  $A_t$  из  $A$ . Измеренный выход будет ограничен величинами  $Y_n^h(A_t)$  и  $Y_n^h(A)$ :  $Y_n^h(A_t) < ^{ex}Y_n^h(A_t) < Y_n^h(A)$ .

Условиям  $A < A_t$  и  $\lambda_\pi < d_t \leq 4\lambda_\pi$  будет соответствовать неравенство  $Y_n^h(A_t) > ^{ex}Y_n^h(A_t) > Y_n^h(A)$ . При толщине  $d_t > 4\lambda_\pi$  величина измеренного выхода  $^{ex}Y_n^h(A_t)$  близка к реальной  $Y_n^h(A_t)$ . При уменьшении толщины мишени в область  $d_t \leq \lambda_\pi$  экспериментальный выход  $^{ex}Y_n^h(A_t)$  будет стремиться к  $Y_n^h(A)$ . Величина  $^{ex}Y_n^h(A_t)$  в этом случае определяется конкретными условиями измерений: толщиной веществ  $A$  и  $A_t$ ; свойствами этих веществ, влияющими на генерацию нейтронов мюонами; характеристиками транспорта нейтронов в веществе. Точный учет этих деталей измерений невозможен без применения метода Монте-Карло.

### 1.6.2. Переходный эффект для нейтронов в $em$ -ливнях

В отличие от  $h$ -ливней переходный эффект для  $em$ -ливней зависит не только от  $A$ , но и от  $Z$ . ПЭ заключается в изменении числа частиц  $em$ -ливня и их энергии при переходе из вещества  $A_1, Z_1$  в вещество  $A_2, Z_2$  на длине  $(3-4)t_r$  при эффективной длине ливня  $r_\perp \sim (10-15)t_r$ . Ниже будем полагать, что поперечный размер ливня  $L_{sh}^{em} \approx 2 t_M \approx 14 A/Z$  много меньше поперечного сечения мишени и не влияет на величину выхода нейтронов в веществе  $A_2$  при переходе ливня  $A_1/A_2$  ( $t_M$  — мольеровская единица длины, см).

Как было отмечено выше, основным процессом генерации нейтронов в  $em$ -ливне является фоторождение посредством ГДР. Множественность фотонейтронов  $\nu_n^{em}$  в ливне, целиком развивающемся

в гомогенном веществе, слабо зависит от энергетического спектра ливневых фотонов  $P(\varepsilon_\gamma) \propto 1/\varepsilon_\gamma^2$ . Множественность  $\nu_n^{em}$  определяется количеством фотонов  $N_{sh}^\gamma$  и выходом фотонейтронов  $y_n^{\Gamma DP}$  при поглощении фотона ядром  $A$ :

$$\nu_n^{em} = N_{sh}^\gamma y_n^{\Gamma DP}. \quad (45)$$

Число фотонов  $N_{sh}^\gamma$  пропорционально количеству ливневых частиц  $N_{sh}^e$ , которое в  $em$ -ливне с энергией  $\varepsilon_{sh}$  обратно пропорционально величине  $\varepsilon^c$ :

$$N_{sh}^\gamma \propto N_{sh}^e \approx \varepsilon_{sh} / \varepsilon^c \propto \varepsilon_{sh} A. \quad (46)$$

Выход  $y_n^{\Gamma DP}$  пропорционален  $A^{0.8}$ , так как

$$\sigma_a \nu_n^{\gamma A} \propto A^{1.8} \text{ [Jon53]}, \text{ а } y_n^{\Gamma DP} = \frac{\mathcal{N}_A}{A} \sigma_a \nu_n^{\gamma A}. \quad (47)$$

Объединяя (45), (46) и (47), получаем для ливня, развивающегося в гомогенном веществе:

$$\nu_n^{em} = N_{sh}^\gamma y_n^{\Gamma DP} \propto N_{sh}^e A^{0.8} \propto (\varepsilon_{sh} / \varepsilon^c) A^{0.8} \propto \varepsilon_{sh} A^{1.8}. \quad (48)$$

Число фотонов в ливне меняется в зависимости от возраста ливня  $s$  ( $s=0$  соответствует началу ливня,  $s=1$  — максимуму развития ливня). Следовательно, влияние ПЭ на генерацию нейтронов в веществе  $A_2$  зависит от возраста  $em$ -ливня на границе  $A_1/A_2$ . Основная часть нейтронов в  $em$ -ливне образуется в интервале возраста  $s \sim (0.5-1.5)$ , в котором заключено подавляющее число фотонов ливня и который можно характеризовать равновесным спектром ливневых частиц. Равновесным является энергетический спектр, проинтегрированный по  $s$ , то есть по глубине развития ливня. Он соответствует спектру при  $s=1$ . Поэтому ниже будем рассматривать ПЭ при  $s=1$ .

При переходе ливня из вещества  $A$  в вещество  $A_t$ , толщины которых не меньше  $10 t_r$ , и  $A > A_t$ , число фотонов на длине  $\sim 4 t_r$  ( $A_t$ ) падает за счет выхода из ливневого процесса частиц с энергией меньше  $\varepsilon^c(A_t)$ . На глубине ливня около  $4 t_r$  число фотонов начинает соответствовать ливню с меньшей начальной энергией. Это приводит к занижению множе-

ственности  $v_n^{em}(A_t)$  в ливне, рожденному в веществе  $A_t$  с той же начальной энергией. Таким образом, при  $A > A_t$  число нейтронов от  $em$ -ливней в мишени с толщиной  $d_t \sim 4 t_r$  будет завышенным, в то время как при  $d_t \sim 10 t_r$  оно окажется заниженным. Присчет нейтронов, входящих в мишень из вещества  $A$ , может только частично компенсировать уменьшение величины  $v_n^{em}(A_t)$ .

В случае  $A < A_t$  переход из  $A$  в  $A_t$  приводит к уменьшению числа нейтронов, образующихся в слое  $4 t_r(A_t)$ , так как для ливня с данной энергией  $\xi_{sh}^*$  количества ливневых частиц в веществах  $A$  и  $A_t$  связаны неравенством  $N^{e,\gamma}(A) < N^{e,\gamma}(A_t)$ . Тем не менее, число нейтронов при дальнейшем развитии ливня во всей толщине мишени  $d_t \sim 10 t_r(A_t)$  будет соответствовать ливню с начальной энергией  $\xi_{sh}^*$ , развивающемуся в однородном веществе  $A_t$ . Это объясняется более низкой  $\varepsilon^c(A_t)$  по сравнению с  $\varepsilon^c(A)$  и сохранением при переходе  $A/A_t$  суммарной энергии частиц, идущей на развитие ливня в веществе  $A_t$ .

Таким образом, в случае  $A > A_t$  для толстой мишени  $d_t > 10 t_r$  ПЭ занижает величину выхода:  $^{ex}Y_n^{em}(A_t) < Y_n^{em}(A_t) < Y_n^{em}(A)$ ; при  $d_t \leq 4 t_r$  будет получен завышенный выход  $Y_n^{em}(A_t)$ :  $Y_n^{em}(A_t) < ^{ex}Y_n^{em}(A_t) < Y_n^{em}(A)$ . В случае  $A < A_t$  для  $d_t > 10 t_r$  измеренная величина выхода должна приблизительно соответствовать реальной величине  $^{ex}Y_n^{em}(A_t) \approx Y_n^{em}(A_t)$ , в то время как при  $d_t \leq 4 t_r$  выход будет заниженным:  $^{ex}Y_n^{em}(A_t) < Y_n^{em}(A_t)$ . В диапазоне толщин мишени  $4 t_r \leq d_t \leq 10 t_r$  соотношение величин  $^{ex}Y_n^{em}(A_t)$  и  $Y_n^{em}(A_t)$  зависит от степени отличия  $A_t$  и  $A$ . Если они значительно отличаются друг от друга, то при  $A_t < A$   $Y_n^{em}(A_t) \leq ^{ex}Y_n^{em}(A_t) < Y_n^{em}(A)$  и  $Y_n^{em}(A_t) \geq ^{ex}Y_n^{em}(A_t) > Y_n^{em}(A)$ , если  $A_t > A$ .

Соотношения величин выхода в зависимости от толщины мишени  $d_t$  и соотношения массовых чисел  $A_t$  и  $A$  при слое вещества  $A$  над мишенью  $d_A > 4 \lambda_\pi$  представлены в Табл. 1.

Таблица 1. Действие переходного эффекта при измерении выхода космогенных нейтронов

Толщина мишени $d_t$	$A_t < A$	$A_t > A$
$d_t \leq 4 t_r$	$Y_n^{em}(A_t) <^{ex} Y_n^{em}(A_t) \leq Y_n^{em}(A)$	$Y_n^{em}(A_t) >^{ex} Y_n^{em}(A_t) > Y_n^{em}(A)$
$4 t_r < d_t \leq 10 t_r$	$Y_n^{em}(A_t) \leq^{ex} Y_n^{em}(A_t) \leq Y_n^{em}(A)$	$Y_n^{em}(A_t) \geq^{ex} Y_n^{em}(A_t) > Y_n^{em}(A)$
$d_t > 10 t_r$	$Y_n^{em}(A_t) >^{ex} Y_n^{em}(A_t) < Y_n^{em}(A)$	$Y_n^{em}(A_t) \approx^{ex} Y_n^{em}(A_t) > Y_n^{em}(A)$
$d_t \leq \lambda_\pi$	$Y_n^h(A_t) <^{ex} Y_n^h(A_t) \leq Y_n^h(A)$	$Y_n^h(A_t) >^{ex} Y_n^h(A_t) > Y_n^h(A)$
$\lambda_\pi < d_t \leq 4 \lambda_\pi$	$Y_n^h(A_t) <^{ex} Y_n^h(A_t) < Y_n^h(A)$	$Y_n^h(A_t) \geq^{ex} Y_n^h(A_t) > Y_n^h(A)$
$d_t > 4 \lambda_\pi$	$Y_n^h(A_t) \approx^{ex} Y_n^h(A_t) \leq Y_n^h(A)$	$Y_n^h(A_t) \approx^{ex} Y_n^h(A_t) > Y_n^h(A)$

Как видим, ПЭ одинаково влияет на обе компоненты выхода  $Y_n^h$  и  $Y_n^{em}$  и, следовательно, на величину выхода  $Y_n$  при оптимальных для измерений толщинах мишени  $d_t \leq 10 t_r \leq 4 \lambda_\pi$ . Это необходимо учитывать при анализе полученных результатов.

## 2. Измерения выхода космогенных нейтронов

Имеющиеся на сегодня результаты измерений выхода  $Y_n$  для разных веществ в интервале энергии  $\bar{E}_\mu$  10–400 ГэВ приведены в таблице 2. В таблицу 2 включены практически все данные, полученные за ~60 лет измерений выхода нейтронов в подземных экспериментах. Данные расположены в порядке возрастания энергии  $\bar{E}_\mu$ , к которой авторы относят свой результат.

Нейтроны под землей генерируются потоком мюонов с энергетическим спектром  $N(E_\mu)$  и средней по спектру энергией  $\bar{E}_\mu$ , соответствующей данной глубине  $H_0$ .

Поэтому функция генерации нейтронов  $\sigma_{\mu A} V_n$  в выражении (8) является не только суммарной по  $\mu A$ -взаимодействиям, но и интегральной по спектру мюонов на глубине  $H_0$ . В силу энергетической зависимости выхода нейтронов  $\sim \bar{E}^{0.8}$  и квазиплоской формы дифференциального спектра  $\frac{dN_\mu}{dE} \sim \frac{1}{(E_0(H) + E_\mu)^y}$  основное количество нейтронов производится мюонами высокоэнергетического участка спектра ( $E_0$  — фиксированная на глубине  $H$  величина,  $E_0(H) \approx 1.65 \bar{E}_\mu(H)$ ). В работах [Наг00],

[Hei02] показано, что использование при расчетах моноэнергетического потока мюонов с энергией  $\bar{E}_\mu$  завышает величину выхода  $Y_n$  относительно выхода при реальном спектре мюонов с  $\bar{E}_\mu$  на 12 % для  $\bar{E}_\mu \sim 100$  ГэВ и на  $\sim 5\%$  для  $\bar{E}_\mu \sim 300$  ГэВ в случае  $\alpha = 0.75$ . Различие величин выходов  $Y_n^{mon}(\bar{E}_\mu)$  и  $Y_n^{real}(\bar{E}_\mu)$  стремится к нулю при увеличении показателя  $\alpha$  до 1. Тем не менее, поскольку, с одной стороны, величина  $\bar{E}_\mu$  является естественным энергетическим параметром, характеризующим поток мюонов и их взаимодействия на данной глубине, и, с другой стороны, ошибки определения энергии  $\bar{E}_\mu$  и соответствующего ей числа нейтронов превышает отличие  $Y_n^{mon}(\bar{E}_\mu)$  и  $Y_n^{real}(\bar{E}_\mu)$ , измеренный выход  $Y_n$  приписывается энергии  $\bar{E}_\mu$ .

Как следует из соответствия энергии  $\bar{E}_\mu$  и глубины  $H$  в различных экспериментах (Табл. 2), энергия  $\bar{E}_\mu$  определяется с большой ошибкой. Для расчета  $\bar{E}_\mu$  необходимо задавать спектр мюонов на поверхности, рельеф поверхности, состав и плотность грунта над установкой, энергопотери мюонов в веществе. Для измерений могут выбираться мюоны определенного направления: в экспериментах [Ann54, Pag60, Гор68, Гор70, Гор71] это были мюоны вблизи вертикали со средней энергией  $\bar{E}_\mu^\perp$ , в остальных экспериментах — мюоны глобального потока с энергией  $\bar{E}_\mu^{\text{глоб}}$ . В случае плоской поверхности  $\bar{E}_\mu^{\text{глоб}}$  больше  $\bar{E}_\mu^\perp$ . Для определения величины  $\bar{E}_\mu$  в экспериментах под холмами и горными вершинами [Гор71, Гор73, Abe10, Aga05, Agl89] необходимо детальное знание рельефа и координат установки. Таким образом, энергия  $\bar{E}_\mu$  является расчетной величиной, и ее погрешность определяется точностью расчета. На рис. 2 представлены зависимости  $\bar{E}_\mu(H)$ , рассчитанные по формулам, полученным разными авторами [Ами75, Gro01, Lip91]. Допуская, что ошибка  $\delta\bar{E}_\mu$  величины  $\bar{E}_\mu$  сравнима с коридором значений  $\bar{E}_\mu$  между кривыми 1 и 3, в котором располагается основная часть экспериментальных данных, ошибку  $\delta\bar{E}_\mu$  можно выразить зависимостью

$$\delta\bar{E}_\mu \approx 2\sqrt{\bar{E}_\mu} \quad (49)$$

Таблица 2. Результаты измерений выхода  $Y_n$

Эксперимент, ссылка	$\bar{E}_\mu$ , ГэВ	H, м.в.э.	$Y \times 10^{-4}, n / \mu / (\text{г}/\text{см}^2)$			
			$Y_{\text{ЖС}}$	$Y_{\text{Fe}}$	$Y_{\text{Cd}}$	$Y_{\text{Pb}}$
[Ann54]	$10.0 \pm 6.3^*$	20	—	$0.98 \pm 0.01$	—	$2.43 \pm 0.13$
[Ber70]	$10.0 \pm 6.3^*$	60	—	—	—	$4.8 \pm 0.6$
[Гор71]	$11.0 \pm 6.6^*$	40	—	$1.32 \pm 0.30$	—	$4.03 \pm 0.36$
[Her95]	$13.0 \pm 7.2$	20	$0.20 \pm 0.07$	—	—	—
[Вое00]	$16.5 \pm 8.1$	32	$0.36 \pm 0.03$	—	—	—
АНС, [Без73]	$16.7 \pm 8.2$	25	$0.47 \pm 0.05$	—	—	—
[Гор71]	$17.8 \pm 8.4^*$	80	—	$1.69 \pm 0.30$	$3.3 \pm 0.4$	$5.66 \pm 0.36$
[Ber70]	$20 \pm 9^*$	110	—	—	—	$6.8 \pm 0.9$
[Гор68]	$40 \pm 12.6^*$	150	—	$3.31 \pm 0.96$	$10.3 \pm 4.3$	$11.56 \pm 1.1$
АНС, [Без73]	$86 \pm 18$	316	$1.21 \pm 0.12$	—	—	—
[Bly15]	$89.8 \pm 2.9$	610	$1.19 \pm 0.21$	—	—	—
[Гор70]	$110 \pm 21^*$	800	—	—	—	$17.5 \pm 3.0$
АНС, [Ряж86]	$125 \pm 22$	570	$2.04 \pm 0.24$	—	—	—
[Abe10]	$260 \pm 8$	2700	$2.8 \pm 0.3$	—	—	—
ZEPLIN-III, [Rei13]	$260 \pm 32$	2850	—	—	—	$58 \pm 2$
LSM, [Klu15]	$267_{-11}^{+8}$	4850	—	—	—	$27_{-7}^{+10}$
[Ber73]	$280 \pm 33$	4300	—	—	—	$116 \pm 44$
LVD, [Ara05]	$280 \pm 33$	3100	$4.38 \pm 0.53$	—	—	—
LVD, [Ara11]	$280 \pm 33$	3100	$4.1 \pm 0.5$	—	—	—
LVD, [Мал13],[Ara13]	$280 \pm 33$	3100	$3.3 \pm 0.5^{**}$	$16.4 \pm 2.3$	—	—
LVD, [Ara15]	$280 \pm 33$	3100	—	$16 \pm 4$	—	—
LVD, [Ara15]	$280 \pm 33$	3100	$3.6 \pm 0.3$	$14.3 \pm 1.6$	—	—
LVD, [Per11]	$280 \pm 33$	3100	$3.2 \pm 0.2$	$19.0 \pm 1.0$	—	—
Vorexino,[Bel13]	$283 \pm 19$	3800	$3.10 \pm 0.11$	—	—	—
LSD, [Agl89]	$385 \pm 39$	5200	$5.3_{-1.02}^{+0.95}$	—	—	—
LSD, [Мал13]	$385 \pm 39$	5200	$4.1 \pm 0.6^{**}$	$20.3 \pm 2.6$	—	—

\*) — вертикальный поток ( $\bar{E}_\mu^\perp$ )

\*\*\*) откорректированная величина

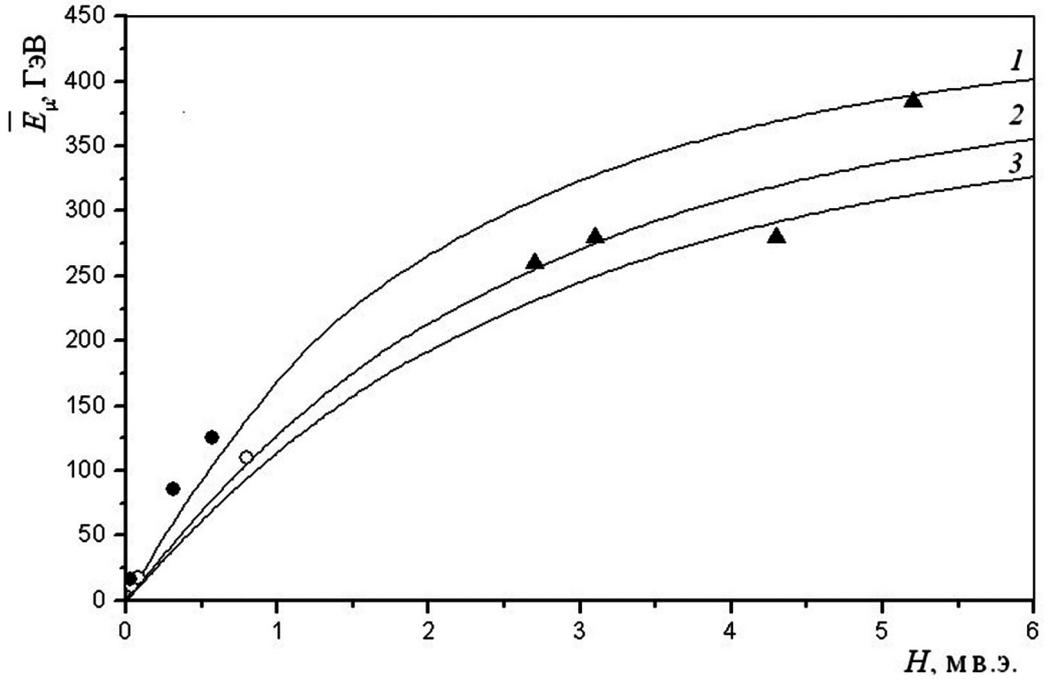


Рис.2. Зависимость  $\bar{E}_\mu(H)$ . Кривые—расчет: 1—[Ами75], 2—[Gro01], 3—[Lip91]; точки—эксперимент: [Гор68], [Гор70], [Гор71], [Без73], [Ряж86], [Ber73], [Abe10], [Agl89], [Ara05]

( $\bar{E}_\mu$  — в ГэВ). В соответствии с этой формулой величинам  $\bar{E}_\mu$  в таблице были приписаны ошибки, где они не были указаны авторами, т.е. во всех экспериментах, кроме [Abe10], [Bly15], [Bel13], [Klu15].

Ошибки определения энергии  $\bar{E}_\mu$  и числа генерируемых в веществе  $A_t$  космогенных нейтронов (включая ПЭ) являются основными источниками неопределенности экспериментальной величины выхода  $Y_n(A_t)$  в подземных экспериментах.

Совокупность всех экспериментальных данных из Табл. 2 можно сопоставить с расчетом по формуле UF (12), которая учитывает роль спектра мюонов  $N(E_\mu)$  при генерации нейтронов. Если по оси  $x$  откладывать расчетное значение выхода  $Y_n^{UF}$ , а по оси  $y$  — соответствующую экспериментальную величину  $^{ex}Y_n$ , то при точном равенстве  $^{ex}Y_n = Y_n^{UF}$  совокупность точек должна следовать прямой, проходящей через начало координат и образующей угол  $\alpha = 45^\circ$  с осью абсцисс (рис. 3). Очевидно, что в случае  $^{ex}Y_n > Y_n^{UF}$  угол  $\alpha > 45^\circ$ , если  $^{ex}Y_n < Y_n^{UF}$ , то  $\alpha < 45^\circ$ . На

рис. 3 можно видеть, что точки (всего 36 значений) образуют множество, согласующееся с прямой  ${}^{\text{ex}}Y_n = Y_n^{\text{UF}}$  во всем диапазоне измерений  $\bar{E}_\mu$  10–385 ГэВ и  $A$  от 10.3 до 207. Разброс точек связан с ошибками измерений, указанными выше, влиянием переходного эффекта и, незначительно, — с особенностями структуры ядер.

Структура феноменологической формулы (31) для  $Y_n^h$ -компоненты, доминирующей в полном выходе  $Y_n$ , совпадает со структурой UF (12). Выражения  $Y_n^h$  и UF отличаются только величинами параметров  $b, \alpha, \beta$ . В соответствии с (42) и (43) большие значения этих параметров в UF связаны с вкладом компонент  $Y_n^{em}$  и  $Y_n^v$ . Подобие  $Y_n^h$  и UF объясняется, во-первых, доминированием компоненты  $Y_n^h$  в полном выходе нейтронов и, во-вторых, фактом, что сечения фотоядерного и  $r, p$ -электромагнитных взаимодействий мюонов являются однородными функциями относи-

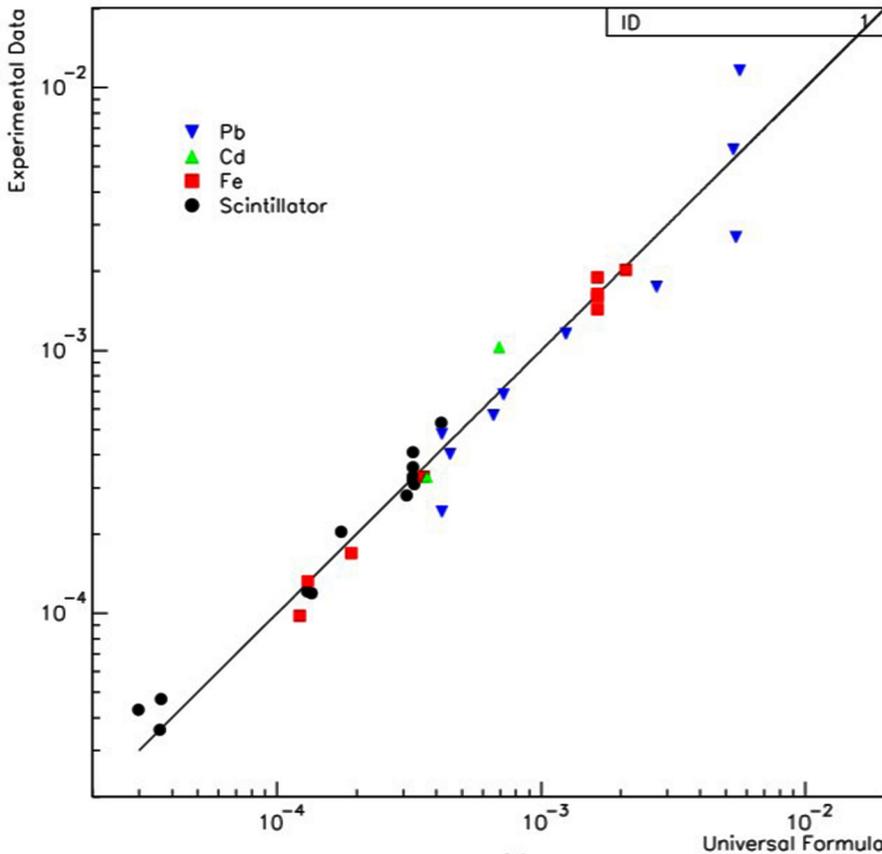


Рис. 3. Соответствие расчета выхода  $Y_n$  по UF с измерениями

тельной энергопередачи  $\varepsilon/E_\mu$ . Таким образом, UF представляет собой выражение для  $Y_n^h$ , параметры которого подобраны по экспериментальным данным. Этим учитываются вклады компонент  $Y_n^{em}$  и  $Y_n^v$  в полный выход нейтронов, а также влияние на его величину реального спектра мюонов со средней энергией  $\bar{E}_\mu$ .

Используя значения параметров  $b_n, \alpha, \beta$ , можно оценить долю  $K(E_\mu, A)$  адронной компоненты в полном выходе  $Y_n^{UF}$ , полагая уменьшение  $Y_n^h$  на 5% для реального спектра мюонов с  $\bar{E}_\mu = 280$  ГэВ:

$$K(E_\mu, A) = 0.95 Y_n^h / Y_n^{UF} = 0.86 (\bar{E}_\mu)^{-0.03} A^{-0.06},$$

в диапазоне чисел  $A$  от 12 до 207 предельные значения доли  $K$  составляют 0.63 и 0.53.

Выход  $Y_n$  при высоких  $\bar{E}_\mu$  связан, главным образом, с нейтронами из ливней. Вследствие небольшого сечения генерации, образование ливней — редкий процесс. Адронный ливень высокой энергии производит большое число нейтронов, что приводит к значительным флуктуациям величины  $Y_n$ , получаемой за конечное время измерений. Для минимизации влияния на величину  $Y_n$  редких событий с большой множественностью нейтронов (порядка сотен) полное число нейтронов, зарегистрированных за время экспозиции мишени, должно быть не меньше тысяч. С этой точки зрения значение выхода, получаемое по UF, является асимптотой, к которой стремится измеряемый выход при увеличении статистики.

### 3. Расчеты величины выхода космогенных нейтронов в зависимости от $E_\mu$ и $A$

#### 3.1. Аналитические расчеты

Помимо вычисления конкретных величин выхода, целями расчетов является определение функций  $Y_n(\bar{E}_\mu)$ ,  $Y_n(A)$  и установление физического смысла величин, входящих в эти функции.

Первый аналитический расчет энергетической зависимости выхода космогенных нейтронов был выполнен для Al [Rya65]. Зависимость

$Y_n$  от  $\bar{E}_\mu$  для разных веществ (Al, Fe, Cd, Pb) впервые была рассчитана в работе [Гор73]. Расчеты [Руа65] и [Гор73] показали, что зависимость  $Y_n(\bar{E}_\mu)$  можно представить в виде  $Y_n = c \bar{E}_\mu^\alpha$ , где  $\alpha$  постоянна во всем диапазоне средних энергий мюонов под землей 40–400 ГэВ и пренебрежимо слабо зависит от  $A$ . Под величиной  $A$  в аналитических расчетах понимается массовое число ядра (количество нуклонов в ядре), в то время как в расчетах методом Монте-Карло (FLUKA, Geant4) – масса ядра (дробная величина). В пионерских расчетных работах был установлен интервал изменения показателя  $\alpha$  от  $\sim 0.7$  до  $\sim 0.8$  при увеличении  $A$  от 27 (Al) до 207 (Pb). Затем на базе экспериментальных данных и расчетов была определена приблизительная величина  $\alpha \approx 0.75$ . С привлечением всех имеющихся на сегодня измерений и приведенного выше феноменологического анализа ее величина может быть уточнена: она составляет  $0.78 \pm 0.02$  [Ага 13]. Ниже будем считать зависимость  $Y_n$  от  $\bar{E}_\mu$  установленной.

В последнее время стала активно исследоваться зависимость выхода  $Y_n$  от  $A$ , что объясняется большим набором материалов, используемых в подземных экспериментах. На рис. 4 приведены результаты аналитических расчетов зависимости  $Y_n(A)$  при энергии  $E_\mu = 280$  ГэВ. На этом рисунке представлены также экспериментальные величины выходов для ЖС, Fe, Cd, Pb. Значения измеренных выходов получены приведением табличных данных  $Y_n$  к энергии  $E_\mu = 280$  ГэВ по закону  $Y_n \propto E_\mu^{0.78}$  с последующим усреднением по одиннадцати измерениям — для ЖС, семи — для Fe, двум — для Cd и десяти — для Pb (Табл. 3). Результаты аналитических расчетов хорошо согласуются (кроме [Руа65]) как с измерениями для ядер Al, Fe, Cd и Pb, так и с формулой UF.

Таблица 3. Результаты аналитических расчетов и измерений выхода в единицах  $10^{-4} n/\mu(\text{г}\cdot\text{см}^{-2})$  для  $E_{\mu} = 280$  ГэВ

элемент	Массовое число, А	Аналитический расчет [Гор68], [Гор70]	Аналитический расчет [Рya65]	Среднее по измерениям
ЖС ( $C_nH_{2n}$ )	10.4	—	—	3.6
$^{27}_{13}\text{Al}$	27	7.2	2.9	—
$^{56}_{26}\text{Fe}$	56	16.2	—	15.8
$^{112}_{48}\text{Cd}$	112	30.0	—	37.6
$^{207}_{82}\text{Pb}$	207	60	—	54.5

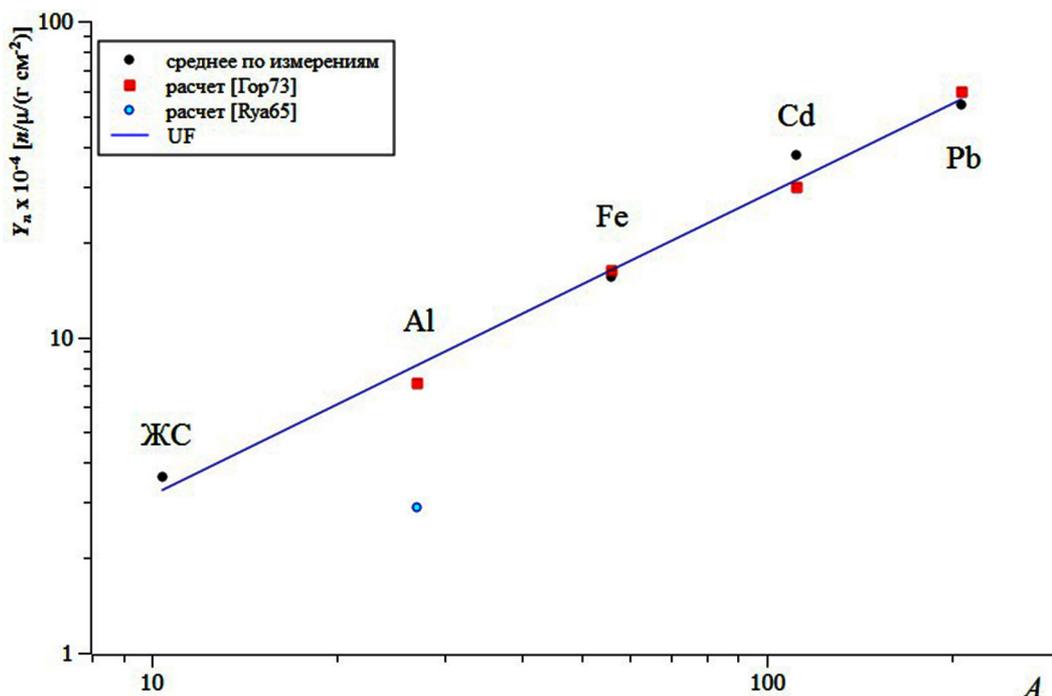


Рис. 4. Аналитические расчеты и данные измерений выхода для ЖС, Al, Fe, Cd, Pb при  $\bar{E}_{\mu} = 280$  ГэВ; расчеты [Гор73] — с учетом спектра мюонов

### 3.2. Расчеты методом Монте-Карло

Начиная с 2000 года при расчетах выхода  $Y_n$  стал активно применяться метод Монте-Карло (МК). В работе [Wan01] для расчета характеристик ядерноактивных частиц, генерируемых мюонами, впервые была использована программа FLUKA в версии FLUKA1999. Затем для этих же целей стала использоваться программа GEANT в версиях Geant4.

Пакет программ FLUKA (FLUktuierende Kaskade) первоначально был ориентирован на моделирование взаимодействий частиц высокой энергии и их продуктов, в то время как GEANT (Geometry And Tracking) был нацелен на описание прохождения частиц через вещество с учетом геометрии и состава мишени и детектора. Оба пакета развивались с начала 70-х годов для планирования ускорительных экспериментов и обработки экспериментальных данных. Сегодня модифицированные пакеты FLUKA (язык программирования — FORTRAN) и Geant4 (C++) обладают практически одинаковыми возможностями при моделировании взаимодействий частиц и ядер и описании характеристик продуктов взаимодействий.

На рис. 5 представлены результаты расчетов выхода  $Y_n(A)$  для некоторых веществ, полученные с помощью FLUKA разными авторами при энергии  $E_\mu = 280$  ГэВ (Табл. 4). Эта энергия, соответствующая экспериментально определенной средней энергии мюонов  $280 \pm 18$  ГэВ на глубине установки LVD, была выбрана для унификации результатов с целью их сравнения между собой. Разброс точек на рис. 5 не позволяет решить одну из основных задач расчета — с достаточной точностью определить показатели  $\alpha$  и  $\beta$  в зависимостях выхода от  $E_\mu$  и  $A$ . Точки систематически находятся в среднем на  $\sim 20\%$  ниже прямой UF, которая соответствует экспериментальным величинам.

На рис. 6 показаны результаты расчетов  $Y_n(A)$  с использованием Geant4 (Табл. 4). По сравнению с результатами FLUKA (рис. 5) разброс точек меньше, их совокупность в целом следует прямой UF, но значения выхода на  $\sim 40\%$  ниже ожидаемых в эксперименте. Таким образом, МК-расчеты для различных  $A$  дают значения  $Y_n$ , систематически меньшие экспериментальных даже при использовании фиксированной энергии  $E_\mu$ , что завышает величину выхода относительно расчетов с реальным спектром мюонов со средней энергией  $\bar{E}_\mu$ .

Таблица 4. Результаты расчетов выхода  $Y_n(A)$  в единицах  $10^{-4}n/\mu/(\Gamma \cdot \text{см}^{-2})$  методом Монте-Карло, фиксированная энергия  $E_\mu = 280 \text{ ГэВ}$

Вещество	Массовое число, А	FLUKA			Geant4		
		[Mei06]	[Kud03]	[Ara05]	[Ман15]	[Ara05]	[Hor08]
ЖС (C <sub>n</sub> H <sub>2n</sub> )	10.4	2.56	2.6	2.5	3.0	2.4	2.1
<sup>12</sup> <sub>6</sub> C	12	3.25	3.6		3.9	2.8	
<sup>16</sup> <sub>8</sub> O	16				4.1	2.7	
H <sub>2</sub> O	14.3				3.4		2.3
Rock GS	22.9				4.3		
Granite	24				5.2		
Gypsum Цемент	24.2				4.2		
<sup>23</sup> <sub>11</sub> Na	23	7.35	7.5	3.7		4.5	
<sup>27</sup> <sub>13</sub> Al	27				7.4		
NaCl	30.6	8.02	8.5		7.4	4.9	
<sup>24</sup> <sub>12</sub> Mg	24				5.2		3.4
<sup>28</sup> <sub>14</sub> Si	28				5.0		
<sup>39</sup> <sub>19</sub> K	39				6.9		
<sup>40</sup> <sub>18</sub> Ar	40				16.9		
<sup>40</sup> <sub>20</sub> Ca	40				4.5		
<sup>48</sup> <sub>22</sub> Ti	48				15.2		
<sup>52</sup> <sub>24</sub> Cr	52				14.9		
<sup>56</sup> <sub>26</sub> Fe	56	16.0	14.8		14.9	7.6	9.9
<sup>64</sup> <sub>29</sub> Cu	64			13.1		8.4	10.7
<sup>73</sup> <sub>32</sub> Ge	73						13.4
<sup>112</sup> <sub>48</sub> Cd	112	18.5				16.3	
<sup>131</sup> <sub>54</sub> Xe	131					16.1	
<sup>157</sup> <sub>64</sub> Gd	157		18.8			19.3	
<sup>197</sup> <sub>79</sub> Au	197	28.3	35.4			23.4	
<sup>207</sup> <sub>82</sub> Pb	207	47.0	43.5	42.1	47.6	26.6	31.2

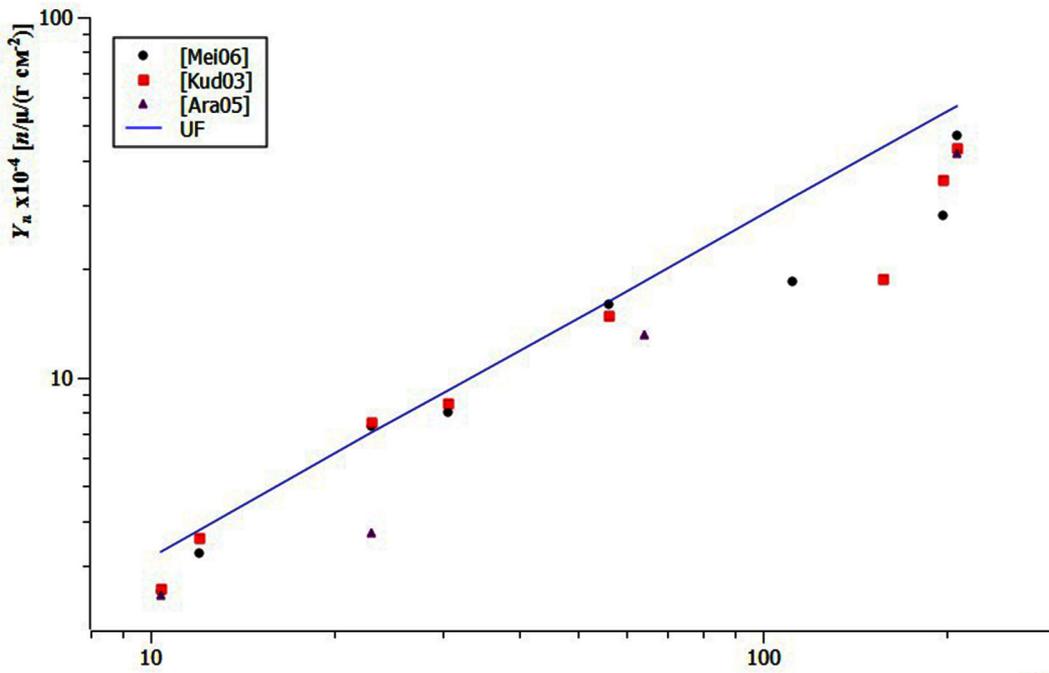


Рис. 5. Расчет выхода с использованием пакета FLUKA для фиксированной энергии  $E_{\mu} = 280$  ГэВ (Табл. 4).

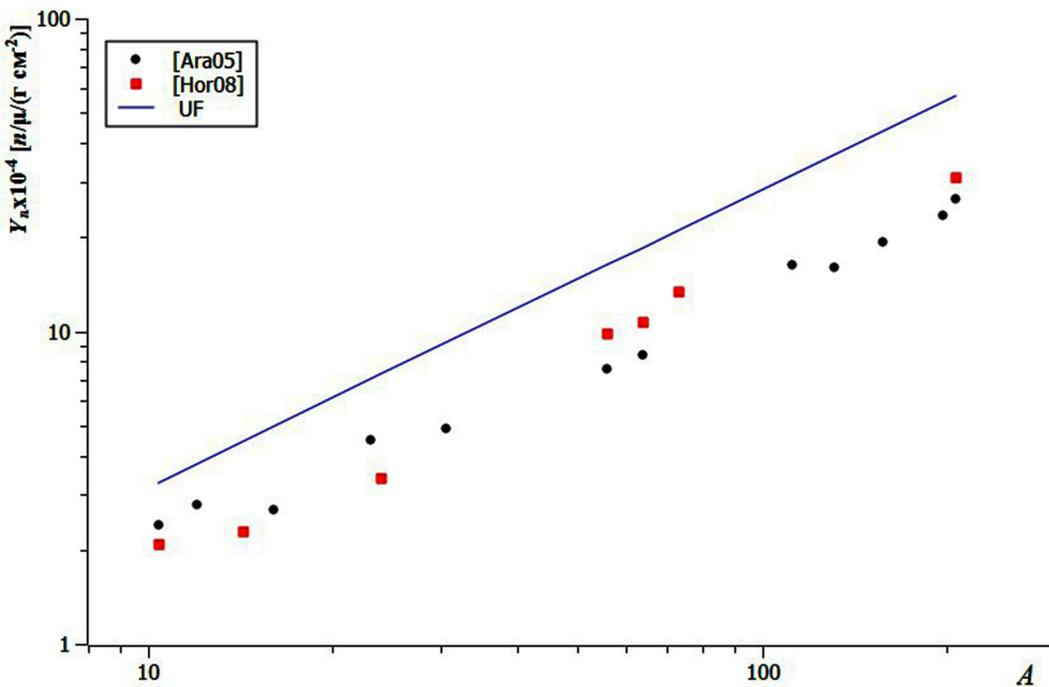


Рис. 6. Расчеты выхода с использованием пакета Geant4 для фиксированной энергии  $E_{\mu} = 280$  ГэВ (Табл. 4).

### 3.3. Расчеты выхода для $\alpha$ -частичных ядер

Отдельно следует рассмотреть расчеты [Ман15, Ман15], выполненные недавно с помощью пакета Geant4 в версии 9.4 для большого набора веществ (Табл. 4, рис. 7). В таблице приведены результаты расчетов, полученные авторами с отбором мюонов по минимальной энергии, теряемой ими в мишени. Отбор увеличивает величину выхода на (25–30)% по сравнению с расчетом без отбора [Ман15]. Величины выхода для рассмотренных веществ (кроме С, Ar и Ti), как и результаты предыдущих расчетов, меньше ожидаемых в эксперименте, поскольку соответствующие им точки лежат ниже прямой UF. Точки характеризуются также значительным разбросом.

В данных работах впервые были рассчитаны выходы для  $\alpha$ -частичных ядер. Был получен качественно новый результат: выход  $Y_n$  для этого класса ядер очень слабо зависит от  $A$  ( $\sim A^{0.07}$ ) и имеет небольшие величины. Оба этих факта должны приводить к значительному (на 30–50%)

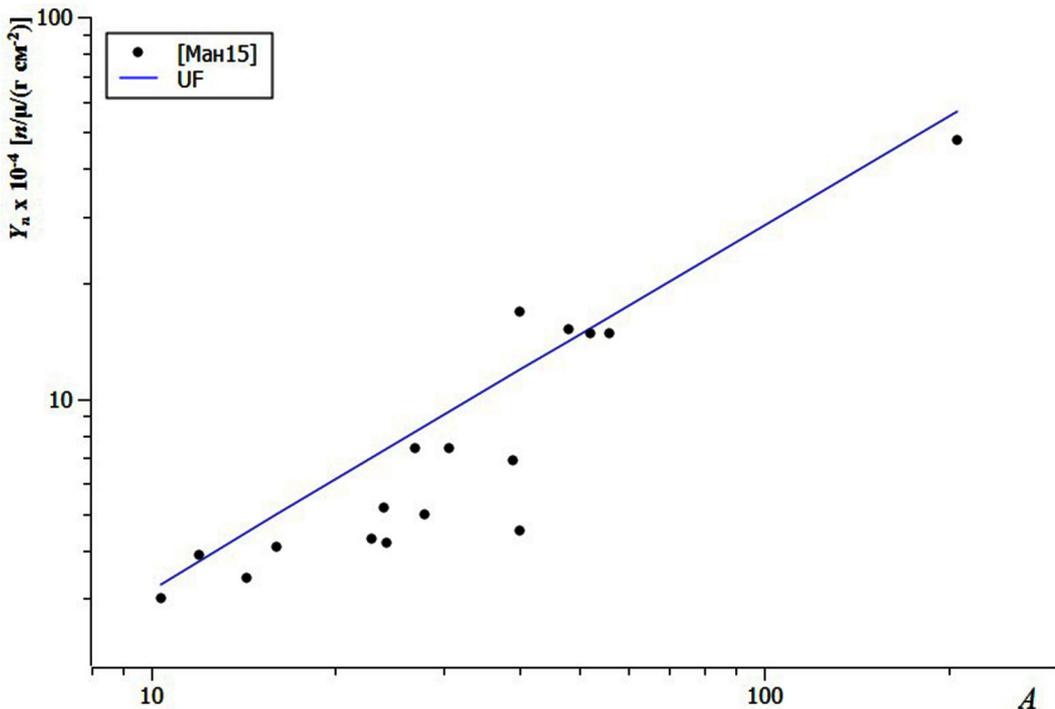


Рис. 7. Расчеты выхода [Ман15] с использованием пакета Geant4 v9.4 при фиксированной энергии  $E_\mu = 280$  ГэВ (Табл.4).

снижению потока космогенных нейтронов в грунте, так как практически все горные породы (за исключением соли) состоят в основном из  $\alpha$ -частичных ядер (C, O, Mg, Si, Ca). В таком случае для процессов генерации космогенных нейтронов в грунте становится неприменимым понятие «стандартного грунта» (используемое в этой связи, например, в работах [Kha83, Ряз86]), поскольку гипотетическое ядро стандартного грунта с  $A = 22$  и  $Z = 11$  не является  $\alpha$ -частичным.

Другим следствием является отличие величин выхода  $Y_n$  для ядер-изобар, что и наблюдается в результатах расчета выхода  $Y_n$  для изобарной пары  ${}^{40}_{18}\text{Ar}$ - ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ . Их величины отличаются в 3.7 раза:  $Y_n(\text{Ar}) = 16.9 \cdot 10^{-4}$ ,  $Y_n(\text{Ca}) = 4.5 \cdot 10^{-4}$ . Разницу выходов авторы объясняют большой энергией отрыва нейтронов для  $\alpha$ -частичного и дважды магического ядра  ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ . Таким образом, авторами подразумевается, что низкая величина и слабая  $A$ -зависимость выхода  $Y_n$  всех  $\alpha$ -частичных ядер связаны с их особой устойчивостью к расщеплениям. Такое объяснение не согласуется с механизмом генерации заряженных пионов и нейтронов в  $h$ -ливнях, которые дают доминирующий вклад в выход  $Y_n$ . Как указано в параграфе 1.5, структура ядра влияет на величину  $Y_n^h$  посредством реакций, идущих на основных ядрах среды: образование вторичных нейтронов каскадными нуклонами ( $n, 2n$ ), ( $p, pn$ ) и фоторождение нейтронов в  $et$ -субливнях, развивающихся в составе  $h$ -ливня. Но роль этих реакций в выходе  $Y_n^h$  невелика, они дают не больше 10%. Основной вклад в величину полного выхода  $Y_n$  вносят каскадные нейтроны и испарительные нейтроны, выходящие из остаточных ядер после развития внутриядерного нуклонного каскада [Ряз86]. Выход нейтронов обоих видов не зависит от структуры ядра вещества. Это подтверждается расчетами Н.М.Соболевского множественности  $v_n$  нейтронов в  $h$ -ливнях с помощью программного пакета SHIELD [Юди13]. Ливни производились отрицательными пионами с энергией 10, 50, 100 и 200 ГэВ в различных мишенях (Табл. 5). Было получено, что величина отношения множественности нейтронов всех энергий  $R_v = v_n(\text{Ar})/v_n(\text{Ca})$  в  $h$ -ливнях

около 1.2 и практически не зависит от энергии пиона, инициирующего ливень. Отношение  $R_v$  характеризует влияние структуры ядер-изобар Ca и Ar на выход нейтронов. Оно невелико, как и следует из механизма генерации нейтронов в  $h$ -ливнях. Используя величину  $R_v = 1.2$  и полагая долю компоненты  $Y_n^h$  в полном выходе  $Y_n(\text{Ca}) = 4.5 \cdot 10^{-4}$  около 60% ( $2.7 \cdot 10^{-4}$ , что соответствует представлениям о генерации нейтронов мюонами), можно с учетом зависимости сечения генерации  $em$ -ливней  $\Sigma_{\mu A}^{em} \propto Z^2/A$  (для кальция  $Z^2/A=10$ , для аргона  $Z^2/A=8.1$ ) найти величины компонент  $Y_n^h(\text{Ar})$  и  $Y_n^{em}(\text{Ar})$  ( $4.2 \cdot 10^{-4}$  и около  $12 \cdot 10^{-4}$  соответственно) и определить их доли в рассчитанном полном выходе  $Y_n(\text{Ar}) = 16.9 \cdot 10^{-4}$ : вклад  $Y_n^h(\text{Ar})$  составляет 25%, вклад  $Y_n^{em}(\text{Ar})$  — около 70%. Такие величины вкладов не согласуются с базовым неравенством  $Y_n^h > Y_n^{em}$  для основных компонент выхода нейтронов при энергиях  $E_\mu \geq 40$  ГэВ.

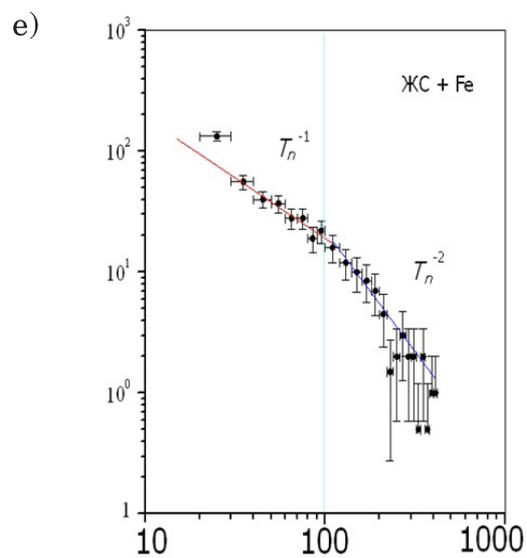
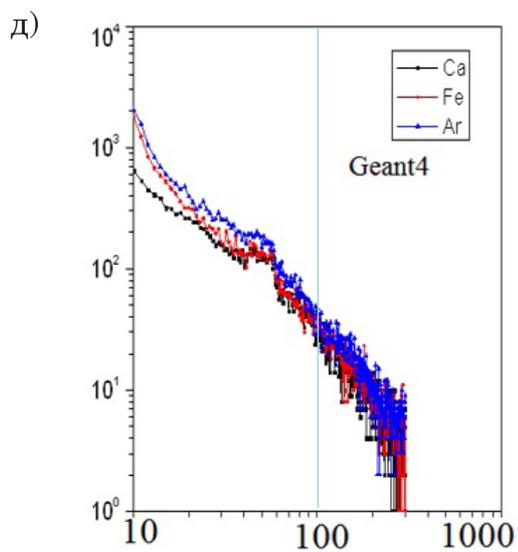
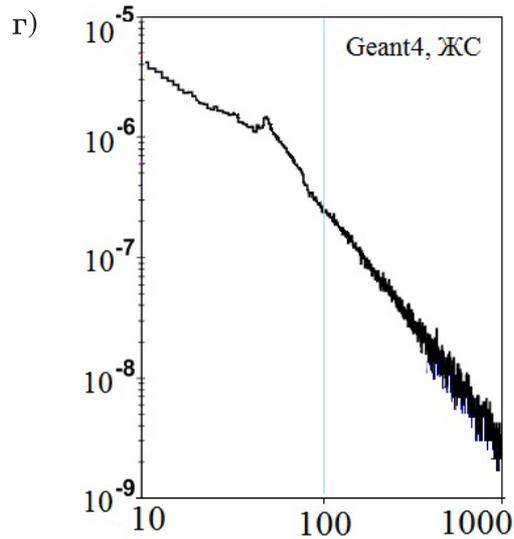
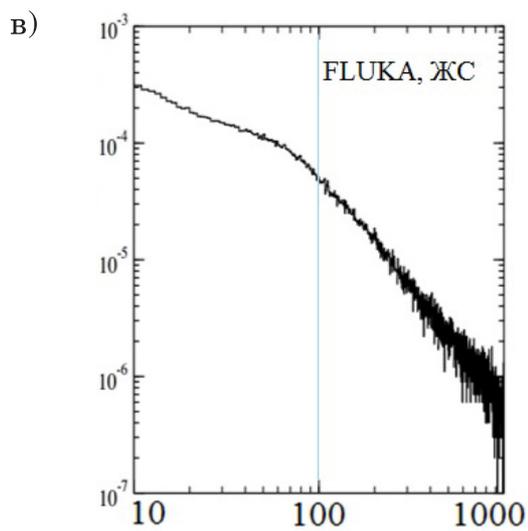
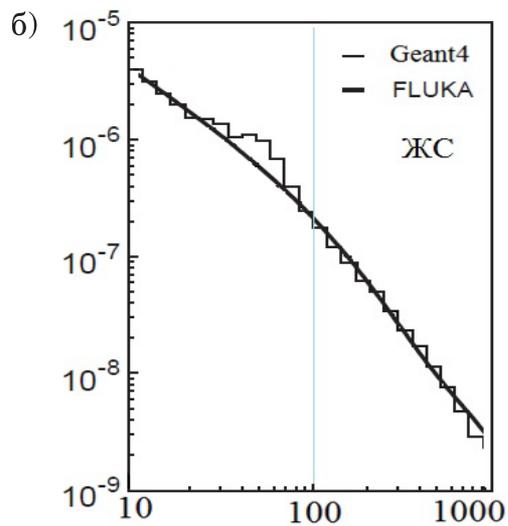
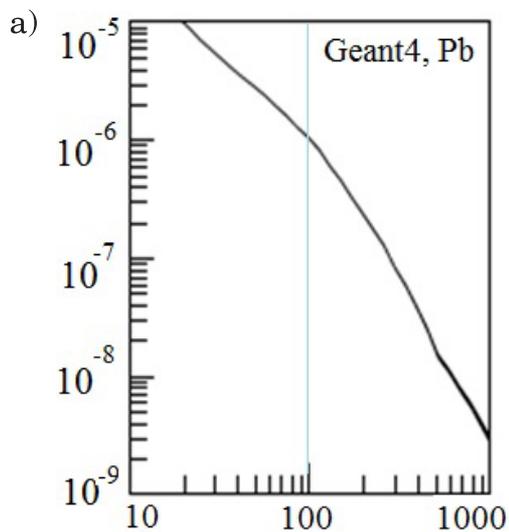
Таблица 5. Множественность нейтронов в  $h$ -ливнях, генерируемых  $\pi^-$ -мезонами. Расчет по *SHIELD*

Ядро	Z	A	10 ГэВ		50 ГэВ		100 ГэВ		200 ГэВ	
			E<20МэВ	All_E	E<20МэВ	All_E	E<20МэВ	All_E	E<20МэВ	All_E
C	6	12	0.50	2.18	0.50	2.25	0.47	2.26	0.49	2.28
O	8	16	0.50	2.38	0.47	2.53	0.47	2.55	0.48	2.61
Ar	18	40	2.45	6.08	2.34	6.40	2.35	6.52	2.34	6.45
Ca	20	40	1.53	4.88	1.49	5.33	1.46	5.39	1.46	5.41
Fe	26	56	2.95	7.36	2.87	7.94	2.86	8.10	2.84	8.07
Xe	54	131	10.52	19.29	10.46	21.57	10.38	22.02	10.25	21.87
Pb	82	207	18.21	30.19	18.09	34.72	18.03	35.42	18.08	36.11

→

Рис. 8. Энергетические спектры космогенных нейтронов  $F^s(T_n)$ .

По оси  $x$  — кинетическая энергия нейтрона  $T_n$  (МэВ), по оси  $y$ : а, б, в, г — выход нейтронов; д, е — число нейтронов. МК-расчеты: а — Pb, Geant4 v9.5 [Rei13]; б — ЖС, Geant4 v6.2 и FLUKA, [Ara05]; в — ЖС, FLUKA [Gal05]; г — ЖС, Geant4 v8.2 [Hor08]; д — Ca, Fe, Ar, Geant4 v9.5 [Юди13]; е — экспериментальный спектр нейтронов, образуемых мюонами в структуре установки LVD (ЖС + Fe) [Ara09, Ara15]



Авторами обсуждаемых работ был рассчитан также энергетический спектр космогенных нейтронов — спектр нейтронов в источнике (спектр генерации)  $F^s(T_n)$  для Ar, Ca, Fe (Рис. 8д). Полученный спектр  $F^s(T_n)$  значительно отличается от измеренного на установке LVD (рис. 8е). Экспериментальный спектр при энергиях  $T_n > 30$  МэВ состоит из двух компонент  $\sim T_n^{-1}$  и  $\sim T_n^{-2}$  с перегибом в интервале 100–150 МэВ. Спектр  $F^s(T_n)$  в области  $T_n > 30$  МэВ формируется главным образом каскадными нейтронами от  $\pi A$ -взаимодействий ливневых  $\pi^\pm$ -мезонов. Поэтому его форма (наличие двух компонент  $T_n^{-1}$  и  $T_n^{-2}$ ) не зависит от  $\bar{E}_\mu$  и  $A$ , а энергия области перегиба спектра слабо связана с  $A$ . Расчетный спектр также можно приближенно описать двумя компонентами, но, во-первых, их показатели заметно отличаются от полученных в эксперименте и, во-вторых, спектр меняет свой наклон в районе 40–50 МэВ. Помимо этого, при данных энергиях в спектрах имеется особенность — нарушение монотонности в виде «горба» (рис. 8б,г,д), что связывается с образованием нейтронов при  $\pi^-A$ -поглощении. Похожие особенности имеют все спектры, представленные на Рис. 8а,б,в,г,д, которые были рассчитаны методом Монте-Карло. Имеющиеся отличия формы расчетных спектров от экспериментального указывает на занижение роли  $h$ -ливней в расчетах выхода  $Y_n$  методом Монте-Карло.

Основываясь на большом разбросе полученных величин  $Y_n$  в зависимости как от  $A$ , так и от  $E_\mu$ , авторы делают важное заключение о невозможности выражения выхода космогенных нейтронов в виде простых функций  $E_\mu^\alpha$  и  $A^\beta$  при постоянных  $\alpha$  и  $\beta$  [Ман15].

Данное утверждение противоречит представлению зависимостей генерации частиц во множественных процессах в виде  $E_\mu^\alpha, A^\beta$ , возможность чего установлена теоретически и подтверждена экспериментально. Как было показано выше (п. 1.3), использование таких зависимостей при постоянных  $\alpha$  и  $\beta$  для описания генерации нейтронов мюонами приводит к выражению  $Y_n(E_\mu, A)$  в виде UF, которое согласуется с экспериментальными данными и отражает общие для всех ядер тенденции вы-

хода космогенных нейтронов. Отрицание возможности описания выхода  $Y_n$  аналитическими выражениями, зависящими от  $E_\mu$  и  $A$ , приводит к невозможности выбора правильного варианта МК-расчета. Сравнение же с измерениями затруднено, поскольку результаты как МК-расчетов, так и измерений при фиксированной энергии  $E_\mu$  или фиксированном массовым числом  $A$  имеют значительный разброс, затрудняющий выявление тенденций зависимости выхода  $Y_n$  от  $E_\mu$  и  $A$ .

Возможным объяснением особенностей результатов расчетов [Man15, Ман15] выхода  $Y_n$  для  $\alpha$ -частичных ядер и спектра нейтронов  $F^s(T_n)$ , а также большого разброса значений  $Y_n$  (рис. 7) может быть, с одной стороны, недооценка процессов генерации нейтронов в  $h$ -ливнях и, с другой стороны, завышение роли  $em$ -ливней, генерация фотонейтронов в которых сильно зависит от структуры ядра [Jon53, Нед89].

### Заключение

1. Выход нейтронов  $Y_n(E_\mu, A)$   $n/\mu/(\text{г}\cdot\text{см}^{-2})$  представляет свойство вещества образовывать нейтроны при прохождении через него мюонов. Выход  $Y_n$  является основной характеристикой космогенных нейтронов. Его величина позволяет вычислять скорость образования нейтронов  $R_n(I_\mu, \bar{E}_\mu, A)$  потоком мюонов с энергией  $\bar{E}_\mu$  и интенсивностью  $I_\mu$  ( $\mu\cdot\text{см}^{-2}\text{с}^{-1}$ ) в веществе  $A$  на данной глубине  $H$

$$R_n = I_\mu Y_n(\bar{E}_\mu, A) \quad (n \text{ г}^{-1}\text{с}^{-1}),$$

а также поток нейтронов  $\Phi_n(I_\mu, \bar{E}_\mu, A)$ , образуемых потоком мюонов  $I_\mu$ :

$$\Phi_n = I_\mu Y_n(\bar{E}_\mu, A) \lambda_n \quad (n \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}).$$

2. Число космогенных нейтронов, выходящих из мишени, зависит от выхода  $Y_n(E_\mu, A)$  вещества мишени, ее размеров и способности поглощать нейтроны. Если их полное количество (проинтегрированное по поверхности мишени) отнести к числу мюонов и средней длине их пробега в мишени в ( $\text{г}/\text{см}^2$ ), полученная величина приобретает раз-

мерность выхода  $Y_n$ . Ее можно назвать техническим выходом нейтронов  $Y_n^t$  для данной мишени. Величина  $Y_n^t$  связана с  $Y_n$  коэффициентом  $\eta_n^t$ , зависящим от формы и размеров мишени, а также длины релаксации  $\lambda_n$  в веществе мишени. Величина  $\eta_n^t < 1$ , поэтому  $Y_n^t < Y_n$ . Точный расчет величины  $Y_n^t$  для данной мишени требует применения метода Монте-Карло.

3. Выход космогенных нейтронов, образуемых спектром мюонов в области энергий  $\bar{E}_\mu > 20$  ГэВ, определяется генерацией нейтронов в  $h$ - и  $em$ -ливнях. Основной вклад в полный выход дают нейтроны  $h$ -ливней. Они имеют два источника происхождения: внутриядерный нуклонный каскад, инициируемый внутриядерным нуклоном отдачи при  $\pi_s^\pm N$ -рассеянии, и процесс испарения нейтронов из ядра-остатка. Среднее число нейтронов, образующихся в  $\pi_s^\pm A$ -неупругом столкновении, зависит от  $A$  и слабо — от энергии  $\pi_s^\pm$ -мезона, поэтому число нейтронов в  $h$ -ливне определяется количеством  $\pi_s^\pm$  в ливне, которое связано с энергией мюона зависимостью  $E_\mu^\alpha$ . Вид зависимости  $E^\alpha$  выхода пионов  $Y_\pi$  и нейтронов  $Y_n$  базируется на фундаментальных особенностях глубоко неупругого  $\mu A$ ,  $\pi A$ -рассеяния в области энергий взаимодействия выше  $\sim 10$  ГэВ. Неизменность показателя  $\alpha$  объясняется практически постоянной величиной сечений  $\sigma_{\mu N}$  и  $\sigma_{\pi N}$  при этих энергиях и независимостью от  $E_\mu$  и  $A$  относительной средней энергии  $\bar{\varepsilon}_\pi/E_\mu$   $h$ -ливня, образованного мюоном с энергией  $E_\mu$ . Величина показателя  $\alpha = 0.75$ , определяющая число  $\pi_s^\pm$ -мезонов в  $h$ -ливне, следует из энергетической зависимости  $E_\mu^{1/4}$  множественности пионов, образующихся в  $\pi_s^\pm A$ -столкновении. Постоянство величины  $\alpha$  в выражении для выхода  $Y_n(E_\mu) = c_A E_\mu^\alpha$  задает неизменность показателя  $\beta$  в зависимости выхода  $Y_n(A) = c_E A^\beta$ .

4. Результаты измерений выхода  $Y_n$  имеют значительный разброс. Он связан с погрешностями определения энергии  $\bar{E}_\mu$  и числа генерированных нейтронов, переходным эффектом для ливней на границе «мишень — окружающее вещество» и, в небольшой степени, со структурой ядра мишени. Переходный эффект заметно влияет на величину выхода

в *et*-ливнях и субливнях от  $\pi^0$ , и значительно меньше — на выход  $Y_n^h$ . Величина эффекта зависит от толщины мишени и соотношения массовых чисел мишени и окружающего вещества.

5. Использование при расчетах фиксированных энергий  $\bar{E}_\mu$  на несколько процентов, в зависимости от  $\bar{E}_\mu$ , завышает величину выхода по сравнению с реальным спектром мюонов со средней энергией  $\bar{E}_\mu$ .

6. Универсальная формула (UF)  $Y_n = b_n^{\text{tot}} E_\mu^\alpha A^\beta$  при  $\alpha = 0.78$  и  $\beta = 0.95$  является лучшей аппроксимацией экспериментальных данных. UF связывает потери энергии  $b_n^{\text{tot}}$  мюона в веществе  $A$  с их способностью генерировать нейтроны в этом веществе. UF имеет физическое обоснование, она может быть получена в рамках феноменологического подхода при постоянных  $\alpha$  и  $\beta$ . Согласно с результатами измерений, UF учитывает влияние на величину выхода реального спектра потока мюонов с энергией  $\bar{E}_\mu$ .

7. Аналитические расчеты и измерения выхода  $Y_n$  в широком диапазоне энергий  $E_\mu$  и  $A$  согласуются между собой и с зависимостью  $E_\mu^\alpha$  при  $\alpha = 0.78 \pm 0.02$ , что позволяет считать зависимость выхода  $Y_n$  от  $E_\mu$  установленной.

8. Расчет эффектов, вызываемых космогенными нейтронами в низкофоновых экспериментах, невозможен без применения метода Монте-Карло. Имеющиеся на сегодня расчеты с использованием различных версий программных пакетов FLUKA и Geant4 дают величины выхода  $Y_n$  не согласующиеся между собой и систематически меньшие результатов измерений; расчеты спектра космогенных нейтронов  $F^s(T_n)$  методом Монте-Карло также не согласуются между собой и с измеренным спектром в области  $T_n$  от 30 до  $\sim 600$  МэВ. Таким образом, МК-расчеты пока не обеспечивают моделирования процессов генерации нейтронов мюонами высоких энергий, адекватного реальным.

## Список литературы

- [Abe10] – S. Abe et al., Phys. Rev. C 81, 025807 (2010)
- [Aga13] – N. Yu. Agafonova, A. S. Malgin, Phys. Rev. D 87, 113013 (2013), arXiv:1304.0919
- [Agl89] – M. Aglietta et al., Nuovo Cimento C 12, 467 (1989)
- [Agl99] – M. Aglietta *et al.*, in *Proceedings of the XXVI ICRC, Salt Lake City, 1999*, Vol. 2, p. 44, hep-ex/9905047.
- [Ale73] – E.N. Alekseev, A.E. Chudakov, V.A. Gurentsov, et al. *in proc. of the 13th ICRC, Colorado*, volume 3, p.1936 (1973)
- [Ama81] – Amaldi Ugo. *Fluctuation in calorimetry measurements*. – Physica Scripta, (1981) vol. 23 p.409
- [Ann54] – M. Annis, H. C. Wilkins, and J. D. Miller, Phys. Rev. 94, 1038 (1954)
- [Ara05] – H. M. Araujo, V. A. Kudryavtsev, N. J. C. Spooner, and T. J. Sumner, Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A 545, 398 (2005)
- [Bar52] – Paul H. Barrett et al., Reviews of modern Physics, **24** (3), 133-173 (1952)
- [Bel13] – J. Bellini et al. (the Borexino Coll.) JCAP08 (2013) 049
- [Ber70] – L. Bergamasco, Nuovo Cimento B 66, 120 (1970)
- [Ber73] – L. Bergamasco, S. Costa, and P. Picchi, Nuovo Cimento A 13, 403 (1973)
- [Bly15] - S. C. Blyth (Aberdeen Tunnel Experiment Collaboration), arXiv:1509.09038 (2015)
- [Boe00] – F. Boehm et al., Phys. Rev. D 62, 072002 (2000)
- [Del95] – J. Delorme, M. Ericson, T. Ericson and P. Vogel, Phys. Rev. C 52, 2222 (1995)
- [Gal05] – Cristiano Galbati, John F. Beacom, Phys.Rev. C**72**, 025807 (2005)
- [Gro01] – D. E. Groom, N.V. Mokhov, and S. I. Striganov, At. Data Nucl. Data Tables 78, 183 (2001)
- [Gru72] – C. Grupen, A.W. Wolfendale, and E. C. M. Young, Nuovo Cimento B 10, 144 (1972)
- [Hag00] – T. Haguer et al., Astroparticle Physics **14** (2000) 33 – 47
- [Hei02] – B. Heisinger, D. Lal, A.J.T. Jull et al., Earth and Planetary Science Letters 200 (2002) 345 – 355
- [Her95] – R. Hertenberger, M. Chen, and B. L. Dougherty, Phys. Rev. C 52, 3449 (1995)
- [Kha83] – F.F. Khalchukov, A.S. Mal'gin, V.G. Ryassny and O.G. Ryazhskaya, Il Nuovo Cimento, v. 6C, N.3, 1983, p. 320 – 326
- [Klu15] – H. Kluck, Ph.D. thesis “Production Yield of muon-induced neutron in Lead”, Karlsruhe, Germany, 2015

- [Kud03] – V. A. Kudryavtsev *et al.*, Nucl. Instrum. Methods A **505**, 688 (2003)
- [Lip91] – P. Lipari and T. Stanev, Phys. Rev. D **44**, 3543 (1991)
- [Jon53] – L.W. Jones and K. M. Terwilliger, Phys. Rev. **91**, 699 (1953)
- [Man15] – K.V. Manukovskiy, O.G. Ryazhskaya, N.M. Sobolevskiy, A.V. Yudin, (2015), p. 72 - 74, *Proceedings, 16th Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics: Particle Physics at the Year of Centenary of Bruno Pontecorvo : Moscow, Russia, August 22-28, 2013*
- [May75] – M. May et al., Phys. Rev. Lett. **35**, N 7 (1975) 407-410
- [Mei06] - D.-M. Mei and A. Hime, Phys. Rev. D **73**, 053004 (2006)
- [Mey63] – Meyer H., Tencher M.W., Lohrmann E., Nuovo Cim., **28**, 1399 (1963)
- [NPP06] – Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics. v. 33 (2006) p. 1232
- [Pag60] – J. De Pagter and R. D. Sard, Phys. Rev. **118** (5), 1353 (1960)
- [Per11] – R. Persiani, Ph.D. thesis, University of Bologna, 2011
- [Rei13] – L. Reichhart et al., Astroparticle Physics **47** (2013) 67-76
- [Rya65] – O. G. Ryazhskaya and G. T. Zatsepin, in Proceedings of the 9<sup>th</sup> International Cosmic Ray Conference, 1965, Vol. 1, p. 987
- [Wan01] – Y.-F. Wang, V. Balic, G. Gratta, A. Fasso`, S. Roesler, and A. Ferrari, Phys. Rev. D **64**, 013012 (2001)
- [Zbi10] - K. Zbiri, Nucl. Instrum. Methods A **615**, 220 (2010)
- [Aga05] – Н. Ю. Агафонова и др. (Коллаб. LVD), Изв. РАН. Сер. физ. **69**, 400 (2005)
- [Aga09] – Н.Ю. Агафонова, В.В. Бояркин, В.Л. Дадыкин, Е.А. Добрынина, Р.И. Еникеев, В.В. Кузнецов, А.С. Мальгин, О.Г. Ряжская, В.Г. Рясный и В.Ф. Якушев (Коллаборация LVD) и Н.М. Соболевский, Изв. РАН Сер. Физ. т.73, №5, ( 2009) с. 666-667
- [Aga11] – Н.Ю. Агафонова и др., Изв. РАН. Сер. физ. **75**, 437 (2011)
- [Aga13] – Н.Ю. Агафонова, А.С. Мальгин. Яд. Физ., т.76, No.5, 2013, с.650-658
- [Aga15] – Н.Ю. Агафонова, Дисс. . . . кан. физ.-мат. наук, ИЯИ РАН (Москва, 2015)
- [Ами75] – Т. П. Аминева и др., *Исследование мюонов сверхвысоких энергий* (Наука, Москва, 1975).
- [Бар72] – В.С. Барашенков, В.Д. Тонеев *Взаимодействия высокоэнергетических частиц и атомных ядер с ядрами*, (Москва, Атомиздат, 1972) с. 647
- [Гор68] – Г. В. Горшков, В. А. Зябкин, ЯФ **7**, 770 (1968)
- [Гор70] – Г. В. Горшков, В. А. Зябкин, ЯФ **12**, 340 (1970)
- [Гор71] – Г. В. Горшков, В. А. Зябкин, Р. М. Яковлев, ЯФ **13**, 791 (1971)

- [Гор73] – Г. В. Горшков, В. А. Зябкин, Р. М. Яковлев, ЯФ **18**, 109 (1973)
- [Гри58] – Григоров Н.Л. и др. ЖЭТФ, **35**, 3 (1958)
- [Гур84] - В. И. Гуренцов, Препринт № П-0380, ИЯИ АН СССР (Москва, 1984)
- [Зац65]-Г. Т. Зацепин, О. Г. Ряжская, Изв. АН СССР. Сер. физ. **29**, 1946 (1965)
- [Без73] – Л. Б. Безруков и др., ЯФ **17**, 98 (1973)
- [Ени87] – Р. И. Еникеев и др., ЯФ **46**, 1492 (1987)
- [Мал86] – А.С. Мальгин, Дисс. кан. физ.-мат. наук, ИЯИ РАН (Москва, 1986)
- [Ман15] – К.В. Мануковский, О.Г. Ряжская, Н.М. Соболевский, А.В. Юдин, Известия РАН, Сер. физ. 2015, Том 79, N3, с. 432–435
- [Нед89] – В.Г. Недорезов, Ю.Н. Ранюк Фотоделение ядер за гигантским резонансом, Наукова думка, Киев, 1989, с. 189
- [Ник80] – Ю. П. Никитин, И.Л. Розенталь, Ядерная физика высоких энергий, М. Атомиздат, 1980, с.232
- [Пау62] – С. Пауэл, П. Фаулер, Д. Перкинс Исследование элементарных частиц фотографическим методом. (М. ИЛ, 1962)
- [Ряж86] – О. Г. Ряжская, Дисс. д-ра физ.-мат. наук, ИЯИ РАН (Москва, 1986)
- [Юди13] – А.В. Юдин, Изучение мюон-индуцированного нейтронного фона в подземных экспериментах с жидкими сцинтилляторами по исследованию физики редких событий, семинар ОЛВЭНА ИЯИ №1083, 2013
- [Яво79] - Б.М. Яворский, А.А. Детлаф, Справочник по физике, (Наука, Москва, 1979)

